線形代数学 I 中間試験解答 No.1 (2015 年 6 月 17 日実施) (松本 眞)

理 学部　数 学科 1 年【学籍番号 B151412】【氏名 解答キッド】

点

注：途中の計算を絶対に消さないこと．途中の計算がないものは採点できません．答案用紙が足りない人は，裏を使うことを断った上で，裏に書いてください．

問題 1. 次の計算をせよ．

(1) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-1)\\2+(-1)\\3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 7+1\cdot 3\\2\cdot 7+4\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\26\end{pmatrix}$.

(3) つるが 7 匹，亀が 3 匹いる．頭の数の合計と，足の数の合計を求めよ．

つる 1 匹の頭の数は 1，足の数は 2 であり，亀 1 匹の頭の数は 1，足の数は 4 である．頭の数の合計，足の数の合計を (行列っぽく) 求めるには，前問のように計算すればよく，答えは

頭の数の合計 $\cdots$ 10，足の数の合計 $\cdots$ 26.

問題 2. 次の計算をせよ．

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1/2\\-1&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+1\cdot(-1)&1\cdot(-1/2)+1\cdot 1/2\\2\cdot 2+4\cdot(-1)&2\cdot(-1/2)+4\cdot 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(2) $P:=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$, $A:=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$ とおいたときの $PA=\begin{pmatrix}pa+qd&pb+qe&pc+qf\\ra+sd&rb+se&rc+sf\end{pmatrix}$.

(3) 上の (2) における $\det(P)=ps-qr$

(4) 上の (2) における $P^{-1}=\begin{cases}\det P=0 \text{ のとき} \cdots & \text{存在しない.}\\ \det P\neq 0 \text{ のとき} \cdots & \dfrac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix}s&-q\\-r&p\end{pmatrix}.\end{cases}$

問題 3. A, B を回転行列 ($\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ の形の行列) とする．

$AB=BA$ を示せ．

【解答】$A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos\phi&-\sin\phi\\\sin\phi&\cos\phi\end{pmatrix}$ とおく．このとき，

$$AB=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi&-\sin\phi\\\sin\phi&\cos\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi&-\cos\theta\sin\phi-\sin\theta\cos\phi\\\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi&-\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\phi)&-\sin(\theta+\phi)\\\sin(\theta+\phi)&\cos(\theta+\phi)\end{pmatrix}.\quad(\because \text{三角関数の加法定理})$$

同様にして BA を計算すると $\begin{pmatrix}\cos(\phi+\theta)&-\sin(\phi+\theta)\\\sin(\phi+\theta)&\cos(\phi+\theta)\end{pmatrix}$ となり，$AB=BA$ が確かめられる．$\square$

問題 4. 次の行列の逆行列を求めよ．ただし，計算の過程もつけよ．

【解答】

$A:=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&0\end{pmatrix}$ とおく．以下，第 i 行の k 倍を第 j 行に足すという基本変形を ⓙ$+k\times$ⓘ，第 i 行を k 倍する基本変形を ⓘ$\times k$ とかく．

$$(A\ \ E)=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&2&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{③+(-1)\times①}\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+(-1)\times②]{①+(-1)\times②}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-1&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{③\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-1&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[②+(-1)\times③]{①+1\times③}\begin{pmatrix}1&0&0&2&0&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&1&-1\end{pmatrix}=(E\ \ A^{-1}).$$

よって，$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ である．

問題 5. 次の行列の逆行列を求めよ. ただし, 計算の過程もつけよ.

【解答】

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned}
(A \quad E) &= \left(\begin{array}{cccc c cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\text{③}+(-1)\times\text{④}} \left(\begin{array}{cccc c cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\text{②}+(-1)\times\text{③}} \left(\begin{array}{cccc c cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\text{①}+(-1)\times\text{②}} \left(\begin{array}{cccc c cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&= (E \quad A^{-1}).
\end{aligned}$$

よって, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

問題 6. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ を実線形写像とする. 合成写像 $g \circ f$(すなわち $\mathbf{x}$ を $g(f(\mathbf{x}))$ に対応させる写像) も線形写像であることを示せ.

【解答】

$g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ が線形写像であることを示すには, 次の二つを示せばよい:

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $(g \circ f)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (g \circ f)(\mathbf{x}) + (g \circ f)(\mathbf{y})$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $(g \circ f)(\lambda \mathbf{x}) = \lambda (g \circ f)(\mathbf{x})$.

(1. の証明)

任意に $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ をとる. このとき,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= g(f(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \quad (\text{合成写像の定義}) \\
&= g(f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})) \quad (f \text{ の線形性}) \\
&= g(f(\mathbf{x})) + g(f(\mathbf{y})) \quad (g \text{ の線形性}) \\
&= (g \circ f)(\mathbf{x}) + (g \circ f)(\mathbf{y}) \quad (\text{合成写像の定義})
\end{aligned}$$

となる. 従って 1. が成り立つ.

(2. の証明)

任意に $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ をとる. このとき,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\lambda \mathbf{x}) &= g(f(\lambda \mathbf{x})) \quad (\text{合成写像の定義}) \\
&= g(\lambda f(\mathbf{x})) \quad (f \text{ の線形性}) \\
&= \lambda g(f(\mathbf{x})) \quad (g \text{ の線形性}) \\
&= \lambda (g \circ f)(\mathbf{x}) \quad (\text{合成写像の定義})
\end{aligned}$$

となる. 従って 2. が成り立つ.

以上から, 合成写像 $g \circ f$ は線形写像である. □

線形代数学 I 中間試験解答 No.3 (2015 年 6 月 17 日実施) (松本 眞)　　理 学部　数 学科 1 年【学籍番号 B151412】【氏名 解答キッド】

問題 7. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を実線形写像とする．このとき，$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を満たす $m \times n$ 行列が一意に存在することを示せ．

【解答】

$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする．すなわち，$\mathbf{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ は第 i 成分が 1，その他が 0 の n 次元縦ベクトルである．行列 A を

$$A = (f(\mathbf{e}_1) \ \cdots \ f(\mathbf{e}_n))$$

と定めると，$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ が成り立つことを示そう (A は $m \times n$ 行列である)．任意に $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ をとる．$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と表す．このとき，

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \Big(f(\mathbf{e}_1) \quad \cdots \quad f(\mathbf{e}_n)\Big)\,\mathbf{x} \\
&= f(\mathbf{e}_1)x_1 + \ldots f(\mathbf{e}_n)x_n \\
&= f(x_1\mathbf{e}_1) + \cdots + f(x_n\mathbf{e}_n) \\
&= f(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= f(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) \\
&= f(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

が成り立つ．次に，このような行列は他にないこと (存在の一意性) を示す．今，$m \times n$ 行列 B に対しても $f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ が成り立っているとする．$x = \mathbf{e}_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$A\mathbf{e}_j = f(\mathbf{e}_j) = B\mathbf{e}_j$$

であるから，行列 A, B の第 j 列が等しいことが言える．これはすべての j について言えるから，$A = B$. □

問題 8. V, W を実線形空間とする．写像 $f: V \to W$ が次の 2 つを満たすとき，f は線形写像であることを示せ．

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.
2. $\forall \lambda$: 無理数, $\forall \mathbf{x} \in V,\ f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$.

【解答】

有理数 λ に対して $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}) \ \cdots \ (*)$ が成り立つことを言えばよい．

$\lambda = 0$ について． $\mathbf{x} \in V$ に対し，$0 \cdot \mathbf{x} = 0$ であることを示す．線形空間の公理 (左分配法則) より[*1]，

$$(0 + 0) \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，$0 + 0 = 0$ であるから (1) の左辺は $0 \cdot \mathbf{x}$ であり，等式 (1) は

$$0 \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} \tag{2}$$

となる．等式 (2) の両辺から $0 \cdot \mathbf{x}$ を引くと，$0 \cdot \mathbf{x} = 0$. 同様にして $0 \cdot f(\mathbf{x}) = 0$ も示される．また，$f(0) = 0$ であったから[*2]，$\lambda = 0$ に対して $(*)$ が成り立つ．

$\lambda = n$ (n : 正の整数) について．

$$f(n\mathbf{x}) = f(\overbrace{\mathbf{x} + \cdots + \mathbf{x}}^{n}) = \overbrace{f(\mathbf{x}) + \cdots + f(\mathbf{x})}^{n} = nf(\mathbf{x}).$$

従って，λ が正の整数のとき，$(*)$ が成り立つ．

$\lambda = -1$ について． 講義ノート p.23 参照．

以上のことと，線型空間の公理 (スカラー倍の結合法則) より，λ が負の整数 $-n$ のときも $(*)$ が成り立つことがわかる ($\because f(-n\mathbf{x}) = -f(n\mathbf{x}) = -(nf(\mathbf{x})) = -nf(\mathbf{x})$)．従って，任意の整数 n について $(*)$ が成り立つことがわかった．最後に，$\lambda = 1/m$ (m : 正の整数) に対して $(*)$ が成り立つことを言えば，$\lambda = n/m = n \cdot 1/m$ に対して $(*)$ が成り立つことが言える ($\because$ 線型空間の公理 : スカラー倍の結合法則).

$$mf\left(\frac{1}{m}\mathbf{x}\right) = \overbrace{f\left(\frac{1}{m}\mathbf{x}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{m}\mathbf{x}\right)}^{m} = f\Big(\overbrace{\frac{1}{m}\mathbf{x} + \cdots + \frac{1}{m}\mathbf{x}}^{m}\Big) = f\left(m \cdot \frac{1}{m}\mathbf{x}\right) = f(\mathbf{x}).$$

この両辺を m で割ることにより，主張が示される．以上から，任意の有理数 $\lambda = n/m$ に対して $(*)$ が成り立つことが示された．□

[*1] 講義ノート p.22, 定義 1.3.6 の 6 (左分配法則).

[*2] 講義ノート p.23.