代数学 II：環と加群 (注：5/28 版：38 ページ以降大幅書き直し予定)

松本　眞[1]

2020 年 5 月 28 日

[1]広島大学理学部数学科 mmat@hiroshima-u.ac.jp http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/TEACH/teach.html

目 次

第1章　環上の加群

参考文献

- 「代数学 II 環上の加群」桂利行著　東京大学出版会:入手しやすい。おおむねこれに沿って講義する。以下、「参考書」といったらこれを指す。
- 「岩波講座　基礎数学　ホモロジー代数 I」河田敬義著　岩波書店:5-lemma, 9-lemma, snake-lemma のステートメントと証明はこちらを見るとよい。
- 「岩波基礎数学選書　環と加群」山崎圭次郎著　岩波書店:きっちり書いてあるので、不思議に思ったことがあったらこれを見るとよい。

半群、モノイド、群

定義 1.0.1. S を集合とする。S 上の**二項演算** (binary operation) とは、

$$\circ : S \times S \to S$$

なる写像のことである。二項演算の指定された集合 $(S, \circ)$ を**マグマ**という（めったに言わない）。マグマの二項演算が結合律

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

を満たすとき、$(S, \circ)$ を**半群**という。（暗黙のうちに、a, b, c は S の任意の元を走ることにしている。）

マグマにおいて、$e \in S$ が**単位元**であるとは、単位法則

$$a \circ e = a = e \circ a$$

を満たすことである。単位元は存在すれば一意。単位元の存在する半群 $(S, \circ, e)$ を**モノイド**という。

半群の元 $a \in S$ に対し、$s \circ a = e = a \circ s$ となるような s が存在するとき、s を a の**逆元**という。a の逆元は、存在すればただ一つである。そこで、逆元を a^{-1} であらわす。全ての元に逆元が存在する半群を、**群**という。

マグマ $(S, \circ)$ において、二元 $a, b \in S$ が**可換**とは、$a \circ b = b \circ a$ が成り立つこと。任意の二元が可換であるような群を**可換群**という。**加法群**とは、可換群 G であって、二項演算 $\circ$ を $+$ で表し、単位元 e を 0、逆元 a^{-1} を $-a$ で表したものである。加法群を、**加群**ということも多い。

1.1　環上の加群

1.1.1　環、単位環、整域、体

環 $(R, +, 0, \times)$ とは、$(R, +, 0)$ が加法群であって、$(R, \times)$ が半群であり、左分配法則 $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$ と右分配法則 $c \times (a+b) = c \times a + c \times b$ を満たすもの。$a \times b$ をしばしば $a \cdot b$ または ab と書く。**可換環**とは、積 $\times$ が可換な環のこと。そうでないものを**非可換環**という。

単位環 $(R, +, 0, \times, 1)$ とは、環であって、$(R, \times, 1)$ がモノイドであるもの。零環 $= \{0\}$ も単位環である。特に単位環であることが重要であるとき、つい「単位的環」と書くことがある。

整域とは、可換環 R であって、$R - \{0\}$ が積についてモノイド（単位元を持つ半群）となるものを指す。**体**とは、さらに $R - \{0\}$ が群となるものを指す。従って、零環は整域でも体でもない。準同型、同型の「型」の字は「形」にはしないほうがいいかも知れないが、字の区別が僕には難しいので混用する。

R, S を環とするとき、写像 $f : R \to S$ が**環準同型**であるとは、$f(a+b) = f(a) + f(b)$ かつ $f(ab) = f(a)f(b)$ が（任意の a, b に対して）成り立つこと。R, S が単位環のとき、環準同型 $f : R \to S$ が**単位環準同型**であるとは、$f(1_R) = 1_S$ が成り立つこと。

1.1.2　環の作用する加群

定義 1.1.1. R, M を集合とする。写像（演算）

$$R \times M \to M, \quad (r, m) \mapsto r \bullet m \in M$$

のことを、R の M への**作用**という。

集合 M, N に対し、M から N への写像の全体を $\mathrm{Map}(M, N)$ であらわす。

上のような作用を与えることと、

$$R \to \mathrm{Map}(M, M), \quad r \mapsto r \bullet (-)$$

を与えることとは同値。

ここで、$r \bullet (-) : M \to M$ とは、$m \in M$ に対して $r \bullet m$ を対応する写像を表す。

M を加法群とする。$\mathrm{End}(M)$ で、M からそれ自身への群準同形全体の集合を表す。$\mathrm{End}(M)$ は通常の加法により加法群、写像の合成を積として単位的環となる。(M の自己準同型環という。)

問題 1.1. 加法群 M に対し、$\mathrm{End}(M)$ が単位環であることを証明せよ。

定義 1.1.2. R を単位環とする。作用 $R \times M \to M$ により M が**左 R 加群**であるとは、$R \to \mathrm{Map}(M, M)$ の像が $\mathrm{End}(M)$ に入り、

$$R \to \mathrm{End}(M)$$

が単位環準同形であること。

問題 1.2. R を単位環とし、M を加法群とする。$R \times M \to M$ が左 R 加群を与えることと、次の全てが成立することとは同値であることを示せ。

1. $r \bullet (m_1 + m_2) = r \bullet m_1 + r \bullet m_2$
2. $(r_1 + r_2) \bullet m = r_1 \bullet m + r_2 \bullet m$
3. $(r_1 \times_R r_2) \bullet m = r_1 \bullet (r_2 \bullet m)$
4. $1_R \bullet m = m$

例 1.1.3. R が体のときは、R 加群は線形代数でならうところの R 線形空間と同じ概念である。

注意 1.1.4. **右 R 加群**。作用 $M \times R \to M$ を考えて、上の 1 から 4 と類似の定義を行う。3 については $(m \bullet r_1) \bullet r_2 = m \bullet (r_1 \times_R r_2)$ とする。これを右 R 加群という。R が可換なときには左右の区別はない。例えば、n 次元横ベクトルの空間 V に、行列環 $M_n(R)$ を右からかけると右 $M_n(R)$ 加群。

以後、R 加群と言えば暗黙のうちに左 R 加群を指す。以下 R 加群の性質を列挙する。一つ一つ時間をかけて手を動かしながら読解して欲しい。

- $M = \{0\}$:これは**零加群**と呼ばれる加群。どんな R でも作用はただ一つ定まり R 加群となる。
- **R 加群準同形**：M, N を R 加群とする。$f : M \to N$ なる群準同型写像で、R の作用を保つものを R 加群準同型という。R-homomorphism, または R-hom という。式で書き下せば、以下の二条件が成り立つこと。
  1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ （これは f が群準同型であること）および
  2. $f(r \bullet_M m) = r \bullet_N f(m)$ が成り立つこと（これを、f が R の作用を保つという）。
- R 加群準同型 f が逆写像を持つとき、逆写像も R 加群準同型となる。このような f を R 加群**同形**という。（R 加群準同形 f に対しては、f が R 加群同形 $\Leftrightarrow$ 全単射。）
- **部分 R 加群**：R 加群 M と、部分集合 $N \subset M$ を考える。N が演算（R 作用、和、0、$-$ の 4 つ）で閉じているとき、N を M の部分 R 加群という。書き下せば、
  1. $m \in N$ ならば $r \bullet m \in N$,
  2. $m_1, m_2 \in N$ なら $m_1 + m_2 \in N$,
  3. $0 \in N$,
  4. $m \in N$ ならば $-m \in N$

  となることである。このとき、N は R 加群である。うめこみ $N \to M$ は R 加群準同形。
- **商 R 加群**:R 加群 M の商集合 M' であり、M' に R 加群の構造が入り、標準全射 $M \to M'$ が R 加群準同形となるもの。

- **商 R 加群** (具体的に) : 実は、商 R 加群はすべて次の形で与えられる。R 加群 M の任意の部分 R 加群 N に対し、加法群としての商（剰余）群 M/N は自然に R 加群となる。(R の作用は、$M \to M/N$ が R 準同形となるように、一意に決まる。）商と Ker の対応により「M の商 R 加群は M の部分 R 加群と一対一に対応」(下記準同型定理使用)。

- $f : M \to M'$ を R-hom とすると、f の**核**（**カーネル**）$\mathrm{Ker}f := f^{-1}(0)$ は M の部分 R 加群、**像** $\mathrm{Im}f$ は M' の R 部分加群。f は、R 加群としての同形 $M/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}f$ を誘導する (**R 加群の準同形定理**)。

- 余核 : $\mathrm{Coker}f := M'/\mathrm{Im}f$。 余像 : $\mathrm{Coim}f := M/\mathrm{Ker}f$ と定義するがすぐには使わない。

- **零射**。M, N を R 加群としたとき、M の任意の元を N の 0_N へ送る写像は R-hom。これを零射といい、単に 0 で表す。ここで、「射」という用語について：homomorphism（準同形）のことをしばしば「射」ともいう。

以下、$r \bullet m$ を、まぎれのない時には rm と記す。

1.1.3　R 加群の例

例 1.1.5. 単位環 R に対し、$M := R$ と置き、$r \bullet m := r \times_R m$ と作用を定義すると M は自然に R 加群である。

n を自然数とする。直積

$$R^n := \{(r_1, \ldots, r_n) \mid r_i \in R \ (i = 1, \ldots, n)\}$$

は、（線形代数で学習した横ベクトルのように）成分ごとでの和により加法群になり、R の作用を

$$r \bullet (r_1, r_2, \cdots, r_n) := (r \bullet r_1, \cdots, r \bullet r_n)$$

で与えると、R 加群となる。R^n と同型な R 加群を、階数 n の**自由 R 加群**という。$R^0 = \{0\}$ となる。

例 1.1.6. R を単位環とする。部分集合 $I \subset R$ が、R 加群 R の部分 R 加群であるとき、I を R の左イデアルという。

このとき、商集合 R/I には商加群として自然に R 加群の構造が入る。

注意 1.1.7. (すべての加法群は $\mathbb{Z}$ 加群である)

任意の単位的環 A に対してただ一つ単位環準同形 $\mathbb{Z} \to A$ が存在する。($1_{\mathbb{Z}}$ を 1_A におくることと、環準同型性から一意に定まる。)

M を加法群とし、$A := \mathrm{End}(M)$ と置くと、上の事実から加法群はただ一通りの方法で $\mathbb{Z}$ 加群。(定義 1.1.2 参照。)

具体的には、$n \in \mathbb{Z}$ に対し、$n \bullet m$ を $n \leq 0$ ならば n 個の和 $m + \cdots + m$ で定義し、$n < 0$ ならば $-n$ 個の和 $-(m + \cdots + m)$ で定義する。

1.1.4　一次結合と生成

定義 1.1.8. M を R 加群とし、$m_1, \dots, m_n \subset M$ とする。$m_1, \dots, m_n$ の**一次結合**とは、ある $r_1, \dots, r_n \in R$ により

$$r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n$$

の形に表される M の元のこと。これら一次結合の全体は、M の部分 R 加群をなす。これを $m_1, \dots, m_n$ が**生成する部分 R 加群**といい、$\langle m_1, \dots, m_n \rangle_R$ で表す。

$$M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle_R$$

となるとき、M は $m_1, \dots, m_n$ で**生成**されるといい、$m_1, \dots, m_n$ を M の R 加群としての生成元という。このような $m_1, \dots, m_n$ がとれるとき、M を**有限生成** R 加群という。単に**有限生成加群**と言ったら、有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群を表す。

定義 1.1.9. 上の定義の一般化。M: R 加群, $S \subset M$ とする。$\langle S \rangle_R \subset M$ で、S を含む最小の部分 R 加群をあらわす。これは、S から「任意に有限個の元をとり、それらの R 係数一次結合をとる」操作で得られる元の集合となり、S で R 上生成される部分加群という。S が有限集合のとき、$\langle S \rangle_R$ の形にあらわされる R 加群を有限生成 R 加群という。S が空集合だと、定義からそれが生成するのは零加群。

例 1.1.10. $R = M = \mathbb{Z}$ とする。1 は $\mathbb{Z}$ を生成する。2 が生成する部分 R 加群は、2 の倍数の集合（すなわち単項イデアル (2)）であり、2 は $\mathbb{Z}$ を生成しない。

問題 1.3. $R = M = \mathbb{Z}$ とする。$8, 12 \in \mathbb{Z}$ が生成する $\mathbb{Z}$ の部分 $\mathbb{Z}$ 加群を記述せよ。

問題 1.4. $R = \mathbb{Z}$ とすると、$M = \mathbb{Q}$ は通常の積により $\mathbb{Z}$ 加群である。$\mathbb{Q}$ は有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群ではないことを示せ。

命題 1.1.11. (Universality of quotient) $f : M \to M'$ を R-hom (R 加群準同形のこと), $S \subset M$ とする。

$f(S) = \{0\}$ とすると、$h : M/\langle S \rangle_R \to M'$ であって標準商写像 $q : M \to M/\langle S \rangle_R$ に対し $h \circ q = f$ となるものがただ一つ存在する。

証明. $f(S) = \{0\}$ と f が演算を保存することから $f(\langle S \rangle) = \{0\}$. よって、$h$ は well-defined である (すなわち、$m_1 - m_2 \in \langle S \rangle$ ならば $f(m_1) - f(m_2) \in \{0\}$) から、写像としては存在。$R$-hom は機械的チェック。一意性は q の全射性から。 □

とくに、S が部分 R 加群のとき (すなわち $S = \langle S \rangle$ のとき) がよくつかわれる。

問題 1.5. $\mathbb{Z}$ 加群準同型 $f : \mathbb{Z} \to M$ において、$f(6) = 0$ であったとする。このとき、可能な $f(\mathbb{Z})$ を全て求めよ（有限個の同型類を求めよ）。

1.1.5　圏（カテゴリー）

圏論は扱わないが、圏の用語を使いたいのでさらっと紹介する。

定義 1.1.12. 圏（カテゴリー）$\mathcal{C}$ とは、次の 4 つの材料であって、次の二つの性質（カテゴリーの公理という）を満たすもの。材料:

材料 1 （対象の集合と呼ばれる）集合。$\mathcal{C}_{obj}$ であらわす。その元を「$\mathcal{C}$ の対象」と呼ぶ。

材料 2 各 $A, B \in \mathcal{C}_{obj}$ に対し、（A から B への射の集合と呼ばれる）集合。$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ で表す。$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ のことを $f : A \to B$, または $A \xrightarrow{f} B$ などで表す。

材料 3 各 $A, B, C \in \mathcal{C}_{obj}$ に対し、（射の合成と呼ばれる）写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C).$$

$g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ に対し、この写像による像を $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ で表す。

材料 4 各 $A \in \mathcal{C}_{obj}$ に対し、（A 上の恒等射と呼ばれる）$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ の元。id_A で表す。

性質（圏の公理ともいう）

性質 1 (結合則、associativity)

任意の $A, B, C, D \in \mathcal{C}_{obj}$ と任意の射

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

に対し、

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

性質 2 (単位則、unit law, identity law)

任意の $A, B \in \mathcal{C}_{obj}$ と $A \xrightarrow{f} B$ に対して $f \circ \mathrm{id}_A = f$。また任意の $C, A \in \mathcal{C}_{obj}$ と $C \xrightarrow{g} A$ に対して $\mathrm{id}_A \circ g = g$。 (圏の定義終わり)

例 : 集合の圏（対象は集合、射は集合間の写像）、群の圏（対象は群、射は群準同型）、位相空間の圏（対象は位相空間、射は連続写像）、R 加群の圏（対象は R 加群、射は R-hom）などなど。

厳密なことをいうと、「集合の圏の対象全体」は「全ての集合の集合」となる。公理的集合論で知られるように、「全ての集合をあつめたもの」は「大きすぎて」集合ではなく、「クラス」である。この問題は、上の例の全てについておきる。ここのところを厳密に扱うことは、僕にはできない。

1.2 直和と直積と自由加群

1.2.1 有限個の加群の直和

定義 1.2.1. (R 加群の直和) $M_1, M_2, \ldots, M_n$ を R 加群とする。

$$M := \prod_{i=1,\ldots,n} M_i := \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \mid m_1 \in M_1, \cdots, m_n \in M_n\}$$

を集合としての直積とする。M は、成分ごとの和

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n) + (m'_1, m'_2, \ldots, m'_n) = (m_1 + m'_1, m_2 + m'_2, \ldots, m_n + m'_n)$$

により $(0, \ldots, 0)$ を単位元とする加法群の構造が入る。また、$r \in R$ の M への作用を

$$r \bullet (m_1, m_2, \cdots, m_n) := (r \bullet m_1, \cdots, r \bullet m_n)$$

で定義すると、M は R 加群となる。M を $M_1, \ldots, M_n$ の**直和 R 加群**という。あるいは、**直積 R 加群**という。

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

であらわす。

注意 1.2.2. あとで見るように、無限個の加群の直和、直積も定義される。その場合、直和と直積は異なった概念となる（同型でなくなる）。

例 1.2.3. $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = R$ のとき、上の直和は R^n に他ならない。

定義 1.2.4. (部分加群の直和)
$M_1, \ldots, M_n \subset M$ を M の部分 R 加群とする。

$$\varphi : M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \to M$$

を $\varphi(m_1, \ldots, m_n) = m_1 + \cdots + m_n$ で定義すると、φ は R 加群準同型となる。
φ が同型であるとき、M は $M_1, \ldots, M_n$ の直和であるといい、これも（上と紛らわしいが）

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

であらわす。

1.2.2 無限個の加群の直積と直和

定義 1.2.5. **直積**：M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を R 加群の族とすると、集合の直積

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

は成分ごとの演算により R 加群となる。すなわち、

$$(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} + (m'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} := (m_\lambda + m'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

により加法群となり、

$$r \bullet (m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} := (r \bullet m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

により R 加群となる。これを R 加群 M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の直積 R 加群といい、$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ であらわす。

定義 1.2.6. 直和：M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を R 加群の族とする。直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ において、有限個を除いて成分が 0 であるような元がなす部分集合を

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$$

であらわす。これは直積の部分 R 加群となる（0 を含み、和と差について閉じており、R の元倍に閉じている）。これを、M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の**直和 R 加群**という。

（したがって、先に述べたとおり、Λ が有限集合なら直和と直積は一致する。）

1.2.3　直積と直和 (カテゴリー論的定義)

この節は、「直積と直和」について、カテゴリー論的に解説する。まず、「同型」という概念は任意のカテゴリーで定義される。

定義 1.2.7. (カテゴリーにおける同型) $\mathcal{C}$ をカテゴリーとする。$f : A \to B$ を対象 A から対象 B への射とする。f の**逆射**とは、射 $g : B \to A$ であって、$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たすものである。逆射をもつような f を**同型射**または単に同型といい、A と B は f により**同型**であるという。f に対し、逆射 g は存在すればただ一つである。なぜならば、もし他に逆射 g' があったとすると、カテゴリーの公理から

$$g' = \mathrm{id}_A \circ g' = (g \circ f) \circ g' = g \circ (f \circ g') = g \circ \mathrm{id}_B = g$$

となり g に一致するからである。そこで、逆射が存在したときそれを f^{-1} と書く。g の逆射は f である。

群、環、体の同型、位相空間の位相同型などはすべてこの枠組みで記述できる。

では我慢して、次の定義を見てほしい。

定義 1.2.8. (直積の圏論的定義：普遍性による)

$\mathcal{C}$ を圏とする。M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を $\mathcal{C}$ の対象の族とする。これらの直積とは、対象 M と射の族 $p_\lambda : M \to M_\lambda$ の組であって、次の性質を満たすもの。

任意の対象 N に対し

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_\lambda), \quad h \mapsto (p_\lambda \circ h)_{\lambda\in\Lambda} \tag{1.1}$$

が全単射である。

「何が普遍性」なのか少し解説する。対象 N と射の族 $N \xrightarrow{q_\lambda} M_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ を考える。N も q_λ もいろいろ動きうるのだが、その中で「一番普遍的なもの」を考えたい。

$q_\lambda : N \to M_\lambda$ という射のことを、筆者は「q_λ という方法で、N が M_λ をいじめている」と考える。そうすると、今考えているのは「N さんという、M_λ さんたち全員をそれぞれ q_λ でいじめているいじめっ子」である。その中で一番普遍的なものとして、「こういういじめっ子の中で、一番弱いもの（最弱いじめっ子)」が考えられる。その人を M さんとしよう。M さんもいじめっ子であるから、$p_\lambda : M \to M_\lambda$ という射によって、M_λ さんたちをいじめているのである。しかし、最弱であるからには、他のいじめっ子 N さんからは、あまねく（遍く）

いじめられているのである。すなわち、ある $h: N \to M$ によっていじめられる。このいじめられかたには合理性が要求される。$p_\lambda \circ h = q_\lambda$ が成立する、すなわち N の M_λ へのいじめ方 q_λ は、実は $N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{p_\lambda} M_\lambda$ と M を経由してのいじめだったのである。しかも、このようないじめ方 h はただ一つ存在する。こうなると、M は「普遍的」(universal) と思えてくる。

これを数式で書く。N によるいじめ方 $q_\lambda : N \to M_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ とは、集合の直積

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_\lambda)$$

の元 $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ である。これが、M を経由して行われていたというのは、$h : N \to M$ という N から M へのいじめがあって、$q_\lambda = p_\lambda \circ h$ となっていたということである。これは、式 (1.1) の写像が全射であるということに他ならない。このような h がただ一つであるというのは、同じ写像が単射であるということに他ならない。こうして直積の定義 1.2.8 が現れる。

さらに、このような M は「同型を除いてただ一つに定まる」。すなわち、ほかに同じ性質を満たす M' と $p'_\lambda : M' \to M_\lambda$ があったとする。すると、M' の最弱性（普遍性）から、ただ一つ $f : M \to M'$ が存在して $p'_\lambda \circ f = p_\lambda$ である。M の最弱性から、$g : M' \to M$ があって $p_\lambda \circ g = p'_\lambda$ である。すると、合成 $g \circ f : M \to M$ は、$p_\lambda \circ (g \circ f) = p_\lambda$ を満たす。いっぽう、$\mathrm{id}_M : M \to M$ も、$p_\lambda \circ \mathrm{id}_M = p_\lambda$ を満たす。「h はただ一つ」という M の性質を用いれば、$g \circ f = \mathrm{id}_M$ である。M と M' を入れ替えれば、$f \circ g = \mathrm{id}_{M'}$ である。こうして、M と M' は同型であることがわかる。以上、上の定義が「直積の普遍性による定義」と呼ばれるゆえんである。(普遍性の説明終わり)

さて、$\mathcal{C}$ が R 加群の圏であるとき、上の定義を書き下せば以下になる。R 加群 M, N に対し、M から N への R 加群準同型の集合を $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ で表す。これは加群である。(R が可換環のときは、R 加群である。)

定義 1.2.9. （普遍性による R 加群の直積の定義）

M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を R 加群の族とする。これらの直積とは、R 加群 M と準同型の族 $p_\lambda : M \to M_\lambda$ の組であって、次の性質を満たすもの。

任意の R 加群 N に対し

$$\mathrm{Hom}_R(N, M) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_R(N, M_\lambda), \quad h \mapsto (p_\lambda \circ h)_{\lambda \in \Lambda}$$

が全単射である。

さて、ここで、M として定義 1.2.5 に現れた $M := \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ をとり、$p_\lambda : M \to M_\lambda$ を、「λ 成分を取り出す準同型」$p_\lambda((m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) := m_\lambda$ で定義する。すると、上の定義の性質を満たしていることが機械的に確かめられる。これにより、R 加群のカテゴリーでの直積の**構成法**（存在性）が示される。

定義 1.2.10. 直和：普遍性による定義 M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を R 加群の族とする。

R 加群 M と、R-hom の族 ι_λ $(\lambda \in \Lambda)$

$$\iota_\lambda : M_\lambda \to M$$

で、次が全単射になるものを M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の直和という：

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, N), \quad h \mapsto (h \circ i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}.$$

この定義によれば、M は M_λ みんなからいじめられるいじめられっ子である。しかし、他のいじめられっ子 N がいたときには、M は $h: M \to N$ によって N をいじめる。つまり、直和 M は「最強いじめられっ子」なのである。詳細は各自ご検討ください。直和は、存在すれば同型を除いて一位に定まる。直和の概念も、一般のカテゴリーで定義することができるが、これも読者に任せる。

さて、先の直和の定義 1.2.6 を用いて

$$M := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$$

とおき、$\iota: M_\lambda \to M$ を「$\iota_\lambda(m_\lambda) \in M$ は、λ 成分は m_λ、他の成分は 0 という元」と定義すると、定義 1.2.10 の直和の普遍性を満たす。これは「直和」の構成方法（存在性）を示している。

定義 1.2.11. 直和 （部分加群として）: M を R 加群とする。$M_\lambda \subset M$ $(\lambda \in \Lambda)$ を M の部分 R 加群の族とする。このとき、M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が直和であるとは、

$$< \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda >_R$$

の任意の元が、ただ一通りに $m_\lambda \in M_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ の和としてあらわされること。

このとき、

$$< \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda >_R$$

は $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ と同型になる。これが M に一致するとき、M は M_λ の直和であるという。

上の定義はわかりにくいので、Λ が有限集合の場合を扱ってみる。

$M_1, \ldots, M_n \subset M$: 部分 R 加群とする。

$$N := M_1 + M_2 + \cdots + M_n \subset M$$

を、$M_1, \ldots, M_n$ の元の一次結合がなす M の部分 R 加群とする（$< M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n >_R$ と言っても同じで、M_i たちが生成する部分 R 加群と言う）。

$(m_1, \ldots, m_n) \mapsto m_1 + \cdots + m_n$ が与える R-hom

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to N$$

が同形のとき、N は M_i たちの直和であるという。

$$N = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

で表す。

さらに、$M = N$ のとき、M は M_i たちの直和であるといい、$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ を M の直和分解という。特に、各 M_i を M の**直和因子**という。

1.2.4　自由 R 加群と基底

定義 1.2.12. M を R 加群とする。元の集合 $x_\lambda \in M$ $(\lambda \in \Lambda)$ が R 上 **1 次独立**とは、一次結合 $\sum_{\lambda:\text{有限個}} a_\lambda x_\lambda$ が 0 のとき、常に $a_\lambda = 0$ となること。さらに、x_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が M を R 加群として生成するときに、元の族 x_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を M の**基底**という。

定義 1.2.13. 基底の存在する R 加群を**自由 R 加群**という。

このとき、M の基底 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、$M_\lambda := R \bullet x_\lambda = \langle x_\lambda \rangle_R \cong R$ とおくと

$$M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R$$

すなわち、自由 R 加群とは R の（任意個の）直和と同形な R 加群となる。逆に、R の（任意個の）直和と同形な R 加群には、基底が存在する。なぜなら、$M \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R$ であるならば、x_λ として「λ 成分が 1、それ以外の成分は 0」という $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R$ の元に対応する M の元をとれば基底となるからである。

特に、自由かつ有限生成なら有限個 (たとえば n 個) の基底がとれる (有限個の生成元をあらわすのに必要な基底をならべると、有限集合でありこれで生成されるから)。この場合には

$$M \cong R^n.$$

定理 1.2.14. (自由 R 加群の普遍性 universality)
M を基底 x_λ $(\lambda \in \Lambda)$ をもつ自由 R 加群とする。N を R 加群とし、y_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を N の元の族とする。このとき、R 加群準同型 $h : M \to N$ であって、$h(x_\lambda) = y_\lambda$ を満たすものがただ一つ存在する。言い換えると、$x : \Lambda \to M$ を $\lambda \mapsto x_\lambda$ なる写像としたとき、次が全単射となる：

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Map}(\Lambda, N), \quad h \mapsto h \circ x.$$

証明. 前半は、ほぼ直和の普遍性 (universality) そのものである。書き下してみる。M の元 m は一意に、有限個を除いて 0 である $r_\lambda \in R$ $(\lambda \in \Lambda)$ により有限和 $\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda x_\lambda$ と表される。題意の R 加群準同型 $h : M \to N$ が存在するなら、この m に対して $h(m) = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda y_\lambda$ と定まるので存在すればただ一つである。一方、このように $h(m)$ を定義することが r_λ の一意性によりでき、h は R 加群準同型である。後半の言い換えは、各自検討されたし。全射性が h の存在であり、単射性が一意性である。 □

定理 1.2.15. (線形空間の次元) R が体のとき、R 加群を R **線形空間**という。そして、任意の R 加群は自由である。（基底の存在定理）。基底の元の個数（濃度）は基底の取り方によらない。この個数を R 線形空間の**次元**という。

有限次元線形空間の場合については、線形代数でならっているはずである。実用上はその場合を知っていればたいてい十分である。無限次元の場合の証明は、基底の存在には Zorn の補題を使う。濃度の比較も含めて、ここでは証明を略する。

無限次元の「濃度」については、難しく感じる人はとりあえず気にしないで良い。

定義 1.2.16. (同型類) R 加群の全体（大きいので集合ではなくクラス）において、同型 $M \cong N$ は同値関係である。この同値関係による類別を、**同型類**という。

なお、同型類という概念も、一般のカテゴリーで定義されることを注意しておく。この用語を使えば、上の定理から次がわかる。

定理 1.2.17. R を体とする。R 線形空間 M, N が同型である必要十分条件は、それらの次元が一致することである。R 線形空間を同型類に類別すると、濃度の全体と一対一対応する。

特に、有限次元 R 線形空間を同型類に類別すると、各同型類に次元を対応させることによって、0 以上の整数と一対一に対応する。

この事実を「次元は R 線形空間の**完全不変量**である」という。

一般の環ではこのように単純ではないが、自由 R 加群については次が成立する。

定理 1.2.18. R が零環ではない単位的可換環のとき、自由 R 加群 M の基底の元の個数（より一般には濃度）は基底の取り方によらない。この数を M のランク (rank, 階数) という。(R が体のときには線形空間 M の次元の概念に一致する。)

証明. 無限基底のときは、なんだか考えにくいので有限個の基底の場合のみ考える。しかし、以下の証明は無限基底でもうまくいく。

主張 1 R が単位的可換環であり零環でなければ、極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ。主張 1 の証明：R のイデアルで 1 を含まないもの全体は、包含関係に関して空ではない帰納的順序集合となる。（0 イデアルがあるから空でない、というところで「零環ではない」という条件を使う。）従って、Zorn の補題により包含関係に関して極大な 1 を含まないイデアルがあり、これは R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ をあたえる。

$\mathfrak{m}M$ で M の元の $\mathfrak{m}$ 係数一次結合全体を表す。これは M の部分 R 加群である。$\bar{M} := M/\mathfrak{m}M$ と置くと、これは商 R 加群であるが、$\mathfrak{m}$ の元は 0 倍で作用する。すなわち、$R \to \mathrm{End}(\bar{M})$ の核に $\mathfrak{m}$ は入る。命題 1.1.11 により、$\bar{R} := R/\mathfrak{m} \to \mathrm{End}(\bar{M})$ が得られ、$\bar{M}$ は体 $\bar{R}$ 加群となり、$r\bar{m} = \bar{r}\bar{m}$ が成立する。

主張 2 M の R 基底 $x_1, \ldots, x_n$ に対し、$\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ は $\bar{M}$ の $\bar{R}$ 基底となる。主張 2 の証明：生成することは、$x_1, \ldots, x_n$ が M を生成することから従う。一次独立性を言う。

$$\bar{r}_1\bar{x}_1 + \cdots + \bar{r}_n\bar{x}_n = 0$$

とする。左辺は $\overline{r_1x_1 + \cdots + r_nx_n}$ であり、これが 0 であることと $\bar{M}$ の定義から、

$$r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \in \mathfrak{m}M$$

である。ここで、$\mathfrak{m}M$ の元は、M の $\mathfrak{m}$ 係数一次結合である。$x_1, \ldots, x_n$ は生成元であるから、そのような元は $x_1, \ldots, x_n$ の $\mathfrak{m}$ 係数一次結合である。$x_1, \ldots, x_n$ が一次独立であるから、これらの係数は一意に決まる。よって、$r_1, \ldots, r_n \in \mathfrak{m}$, すなわち $\bar{r}_1 = \cdots = \bar{r}_n = 0$ となり、$\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ は一次独立である。

主張 2 により、M の基底の元の個数は、$M/\mathfrak{m}M$ の体 $R/\mathfrak{m}$ 線形空間の（一つの）基底の元の個数に一致する。ここで、上で証明抜きに述べた「体に関する基底の個数の一意性」から、$M/\mathfrak{m}M$ の次元に一致する。この数は基底 $x_1, \ldots, x_n$ の取り方によらない。

（ところで、細かいことだが、R が零環だと R 加群は零加群しか存在しない。そこには $\{0\}$ という一元からなる基底と、空集合という 0 個の元からなる基底があり、個数の一意性が成り立たない。）　□

こうして、自由 R 加群の同形類は、濃度の全体と一対一となる。特に、有限生成自由 R 加群の同形類は階数により自然数と一対一。（ここでは、自然数は 0 を含むとする。）

うえの主張 1, 主張 2 はそれぞれ重要なので少し一般化した命題を述べておく。

命題 1.2.19. R を単位環とする。I が R 自身ではない R の左イデアル (これは $1 \notin I$ と同値) とする。I を含む R の極大左イデアル $\mathfrak{m}$、すなわち $I \subset \mathfrak{m} \neq R$ で包含関係について極大なものが存在する。とくに、R が可換なとき、$a \in R$ が単元（積について可逆な元、単項イデアル (a) が R と一致するという条件と同値）でないならば、a を含む極大イデアルが存在する。($I = (a)$ ととればよい。)

証明は先の要領で Zorn の補題を使う。

命題 1.2.20. R を単位的可換環とする。I を R の R 自身でないイデアルとする。一般に、R 加群 M に対して IM で M の元の I 係数一次結合の全体を表すと、M の部分 R 加群となり、M/IM も R 加群であるが、自然に R/I 加群となる。M を M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の直和とする。このとき

$$M/IM \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda / IM_\lambda$$

となる (R 加群としても、R/I 加群としても)。

証明は、各自試みよ。

定義 1.2.21. ねじれ元。 R 加群 M の元 x に対し、その annihilator (R の左イデアルである)

$$\mathrm{Ann}(x) = \{a \in R \mid ax = 0\}$$

が $\{0\}$ でないとき x をねじれ元という。$< x >_R$ が R と同形でない、と言っても同じ条件。$x = x_1$ が一次独立でない、と言っても同じ条件。

R が整域なら、M のねじれ元の全体が部分 R 加群をなす。M のねじれ部分 (torsion part) という。

1.3　完全系列と可換図式

R 加群の列 M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ と R 加群準同型

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \to \cdots \to M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \to \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$$

が与えられたとき、長さ n の系列という。左や右や両方に無限に伸びた系列も自然に考えられる。この系列が M_i において**完全** (exact) であるとは、

$$\mathrm{Im} f_{i-1} = \mathrm{Ker} f_i$$

が成立することである。いたるところ完全な系列を**完全系列** (exact sequence) という (ただし、右端や左端があるときにはそこでの完全性は定義できないので要求しない：上の図で言うと M_1, M_n では要求しない)。$0 \to M \to N$ が完全であることと $M \to N$ の単射性は同値、$M \to N \to 0$ が完全であることと $M \to N$ の全射性は同値。

$f : N \to M$ が R 加群準同型であるとき、$\mathrm{Coker}(f) := M/\mathrm{Im}(f)$ と定義した。次の系列は完全系列である。

$$0 \to \mathrm{Ker} f \to N \to M \to \mathrm{Coker}(f) \to 0.$$

定義 1.3.1. $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0$ が完全系列であるとき、これを短完全系列 (short exact sequence) という。これは、

1. f が単射、g が全射、$g \circ f = 0$ で、自然に誘導される $\mathrm{Coker}(f) = N/\mathrm{Im}(f) \to L$ が単射（同型といっても同じ）であることと同値。

2. 双対的に、次とも同値: f が単射、g が全射で、$g \circ f = 0$ で、自然に誘導される $M \to \mathrm{Ker}g$ が全射（同型といっても同じ）であることと同値。

注意 1.3.2. 「双対的」という言葉を定義せずに使った。おおむね、カテゴリーで「射の向きを逆にして得られる議論」のことを**双対** (dual) という。例えば「$0 \to M \to N$ が完全系列」の「双対概念」は「$0 \leftarrow M \leftarrow N$ が完全系列」であり、「$M \to N$ が全射」の双対は「$M \to N$ が単射」となる。universality を考えると Ker と Coker が互いに双対であることがわかる。上の 1,2 のステートメントは互いに双対になっている。（カテゴリー論で定式化できる。興味のある人は自学して欲しい。）

可換図式 図式を TeX で書くのが面倒なので黒板で説明するが、

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \to & M_1 \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ N_2 & \to & M_2 \end{array} \tag{1.2}$$

などと書いたら、この $\circlearrowleft$ の書いてある 4 角形の各辺の射の合成（この場合、左上から右下に行くのに M_1 経由と N_2 経由二通りある）が一致すること。もともとは、建築現場で「ここにガラスが入っています」という記号らしい。

five lemma, nine lemma, snake lemma などはホモロジー代数の参考書を見てほしい。（最初に挙げた参考書の演習問題にあらわれているこれらの補題は、一般的に使われているものより弱いのでお勧めしない。）

可換図式は universality を使って証明するときに便利である。

例 1.3.3. 命題 1.1.11(その証明後にある S が部分加群 N である場合）の言い換えは、次のとおり。$N \subset M$ を部分 R 加群とすると

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

なる短完全系列がある。今、$f : M \to L$ なる R-hom が与えられたとき、合成 $N \to M \to L$ が 0 になるならば f は M/N を経由する (f factors through M/N)、すなわち f はある $h : M/N \to L$ により合成 $M \to M/N \to L$ と一致する。このような h はただ一つ存在する。

これを使うと上の可換図式 (1.2) に付随して、下の可換図式 (1.3) のように R 加群準同型 $M_1/\mathrm{Im}(N_1) \to M_2/\mathrm{Im}(N_2)$ が誘導される。

$$\begin{array}{ccccc} N_1 & \to & M_1 & \to & M_1/\mathrm{Im}(N_1) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{誘導} \\ N_2 & \to & M_2 & \to & M_2/\mathrm{Im}(N_2) \end{array} \tag{1.3}$$

上で登場した左の縦二本の R-hom が同形 $M_1 \cong M_2$, $N_1 \cong N_2$ であるなら、誘導された R-hom も同型である。なぜ同型か？左の縦の射二つが同型であるとして、それぞれの逆射を下に書くと可換図式

$$\begin{array}{ccccc} N_1 & \to & M_1 & \to & M_1/\mathrm{Im}(N_1) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f \\ N_2 & \to & M_2 & \to & M_2/\mathrm{Im}(N_2) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow g \\ N_1 & \to & M_1 & \to & M_1/\mathrm{Im}(N_1) \end{array} \tag{1.4}$$

が得られる（誘導された射に名前を付けた）。たての射二つ（3 組ある）を合成すると

$$\begin{array}{ccccc} N_1 & \to & M_1 & \to & M_1/\mathrm{Im}(N_1) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow g \circ f \\ N_1 & \to & M_1 & \to & M_1/\mathrm{Im}(N_1) \end{array} \tag{1.5}$$

である。ここで、左二つの縦の射は恒等射である。そして、$g \circ f$ の代わりに恒等射 id を取っても図式は可換である。命題 1.1.11 の一意性から、$g \circ f$ は恒等射であることがわかる。同様の方法で対称性より $f \circ g$ も恒等射であることが示せる。よって f は同型である。

余談：圏と関手

余核の話をしたタイミングで、余談をする。

定義 1.3.4. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を圏とする。$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が**関手 (functor)** であるとは、材料として $F_o : \mathcal{C}_{obj} \to \mathcal{D}_{obj}$ なる写像と、$\mathcal{C}$ における各対象 A, B に対して材料 $F_m : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_o(A), F_o(B))$ が定まっていて、二つの公理：$F_m(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F_o(A))}$ および $F_m(g \circ f) = F_m(g) \circ F_m(f)$ を満たすもの、である。

定義 1.3.5. 今、件 $\mathcal{C}$ の射のカテゴリー $(\mathcal{C} \downarrow \mathcal{C})$ を次のように定義する。その対象は：$M_1 \xrightarrow{f} M_2$ なる射。その射は：

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \to & M_2 \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ N_1 & \to & N_2 \end{array} \tag{1.6}$$

である。

上記の議論によれば、$M_1 \xrightarrow{f} M_2$ に対して Coker$f$ を対応させる対応は、$(\mathcal{C} \downarrow \mathcal{C})$ から $\mathcal{C}$ への関手に他ならない。特に、関手は同型を同型に送る (なぜなら $\mathrm{id} = F_m(\mathrm{id}) = F_m(f \circ g) = F_m(f) \circ F_m(g)$ だから)。上記の議論はその一例に過ぎない。

定義 1.3.6.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L & \to & M & \to & N & \to & 0 \\ & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\ 0 & \to & L' & \to & M' & \to & N' & \to & 0 \end{array} \tag{1.7}$$

で、上の行も下の行も短完全系列とする。このとき、縦の三つの射の組を、「上の短完全系列から下の完全系列への**準同型**という。

問題 1.6. 上の準同型の定義を用いて、「R 加群の短完全系列のカテゴリー」の定義を与えよ。

注意 1.3.7. 上の問題により、短完全系列間の「同型」の概念が定義される。が、結論から言えば、「縦の三つの射がどれも同型」という定義となる。

命題 1.3.8. 上の短完全系列二つの可換図式において、

1. $L \to L'$, $N \to N'$ が単射ならば $M \to M'$ は単射
2. $L \to L'$, $N \to N'$ が全射ならば $M \to M'$ は全射

従って特に、$L \to L'$, $N \to N'$ が同型ならば $M \to M'$ は同型である。

証明. 1. を示す。いま、M の元 m が M' におくると 0 であるとする。右の可換性から、m を N に送った元 n を N' におくると、$M \to M' \to N'$ と送った元と一致するから、それは 0 である。$N \to N'$ の単射性から、n は 0 である。つまり m は $M \to N$ のカーネルに入る。完全性から、m は L の元 l の $L \to M$ による像である。しかるに、左の可換性から l を $L \to L' \to M'$ とおくればこれは 0 となる。この合成写像は、単射の合成だから単射である。したがって、l 自身が 0 である。m は l の像だからこれも 0。よって $M \to M'$ は単射。

2. は 1. の「双対命題」である。双対命題の証明は、もとの命題の証明と良く似た方法でしめせる。読者にまかせる。 □

命題 1.3.9. (分裂) R-hom $p : M \to N$ と $i : N \to M$ があり、$p \circ i = \mathrm{id}_N$ であるとする。i を p のセクションといい、p を i のレトラクトという。このとき、p は全射、i は単射であり、

$$\mathrm{Ker} p \oplus N \to M, \quad (x, y) \mapsto x + i(y)$$

は同型である。M は N と $\mathrm{Ker} p$ の**直和に分裂する**、という。

証明. p の全射性、i の単射性は、「集合と写像」の性質として容易に証明される。$\mathrm{Ker} p \oplus N \to M$ が単射であることは「$x+i(y) = 0$ ならば $0 = p(x+i(y)) = p(x)+y = y$、よって $x = 0$」から従う。全射であることは、$m \in M$ に対して $y := p(m) \in N$ とおき、$x := m - i(y) = m - i(p(m))$ とおくと、$p(x) = p(m) - p(i(p(m))) = p(m) - \mathrm{id}_N(p(m)) = 0$ より $x \in \mathrm{Ker} p$ となり、$m = x + i(y)$ となることから従う。 □

系 1.3.10. $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ を単完全列とする。次は同値。

1. $$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L & \to & M & \to & N & \to & 0 \\ & & \| & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \| & & \\ 0 & \to & L & \to & L \oplus N & \to & N & \to & 0 \end{array} \tag{1.8}$$
   なる準同型 $\varphi : L \oplus N \to M$ (上の図式の $\uparrow$) がある。ここで、$\|$ は（この場合下から上への）恒等射をあらわす。（このような φ は存在すればただ一つで、自動的に同型となる。）
2. $M \to N$ はセクション i を持つ。
3. $L \to M$ はレトラクト p を持つ。

このとき、短完全系列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ は分裂する (split) という。

証明. 1 の「φ が同型」となることは、命題 1.3.8 から従う。存在したときの一意性の証明は、読者に任せる。ヒント：ほかに φ' があったとしたら、$\varphi(l,n)-\varphi'(l,n)$ の N における像は 0 となることがわかり、L に入るが、そこでも 0 となる。

1 から 2 と 3:$i_N : N \to L \oplus N$ を埋め込み $n \mapsto (0,n)$ とすると、$\varphi \circ i_N$ は $M \to N$ のセクション、$\varphi \circ f$ は $L \to M$ のレトラクトである。

2 から 1:上の命題より $L \oplus N \to \mathrm{Ker}(g) \oplus N \to M$ なる同型が得られる。これが 1 の φ の条件を満たす射を与える。

3 から 1:双対命題である。読者に任せる。ヒント：$L \oplus \mathrm{Coker}(f) \to M$ なる同型がある。 □

1.4 単因子論

行列について。R を可換環とする。$M_{n,m}(R)$ で $n \times m$ の R 成分の行列の集合をあらわす。成分ごとの和とスカラー倍により、ランク nm の自由 R 加群となる。

$n=m$ のとき、$M_{n,m}(R)$ を $M_n(R)$ で表す。積が入り、単位環となる。その積に関する（モノイドの）可逆元の集合 $M_n(R)^\times$ は群をなす。これを $\mathrm{GL}_n(R)$ で表す。$A \in M_n(R)$ が $\mathrm{GL}_n(R)$ に入る必要十分条件は、$AB = E_n = BA$ なる B が存在することになる。このような行列を**可逆行列**という。

命題 1.4.1. $A \in M_n(R)$ が可逆である必要十分条件は、$\det A \in R^\times$ (ここで $R^\times$ は R の乗法についての可逆元のなす群)。

証明. $\tilde{A}$ を A の余因子行列とする。線形代数でならったように $A\tilde{A} = \det(A) \cdot E_n = \tilde{A}A$ である。従って、$\det(A)$ が R の可逆元ならば $\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ が A の逆元を与える。

逆に、A が可逆ならば $AB = E_n$ の determinant をとって $\det(A)\det(B) = 1$、すなわち $\det(A) \in R^\times$。 □

注意 1.4.2. 特に、$R = \mathbb{Z}$ のとき、$\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ であるから、可逆行列とは行列式が ± 1 となる行列のことになる。このような行列を unimodular 行列という。

単項イデアル整域を PID と書く。

定理 1.4.3. (単因子形)

R を PID とする。任意の $A \in M_{m,n}(R)$ に対し、ある $P \in \mathrm{GL}_m(R)$ と $Q \in \mathrm{GL}_n(R)$ が存在して、PAQ が次の形になる。

$$\begin{pmatrix} e_1 & & & & & \\ & e_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e_s & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

ここに、空白は 0 をあらわし、$e_1|e_2$, $e_2|e_3, \ldots, e_{s-1}|e_s$, $e_s \neq 0$ である。A に対して $e_1, \ldots, e_s$ は単元（すなわち $R^\times$ の元）倍を除いて一意に決まる。$e_1, \ldots, e_s$ を A の単因子（elementary divisor）という。(1.9) を A の単因子形という。(不変因子形という書物もある。)

上の形だと正方行列っぽく見えるが実は $m \times n$ 行列であることと、右下の 0 は存在しないかもしれないこと、また $s = 0$(すなわち 0 行列) のこともあることを注意しておく。

R が体のときには、線形代数でならっていると思う: e_i は全て 1 にとることができ、s が行列のランクとなる。まず、定理の前半（P, Q の存在）を証明する。

R が Euclid 整域の場合証明から計算方法がわかるので、一般の PID でなく R が Euclid 整域の場合をまずやる。$R = \mathbb{Z}$ や $K[t]$（K は体）が代表的である。これらの環における互除法については既知とする。

3 種の基本変形行列を用いる。

1. 行入れ替え行列。左から A にかけると、A の i 行と j 行が入れ替わる $m \times m$ 行列がある。これは可逆。

2. 行単元倍。$a \in R^\times$ をとる。左から A にかけると、A の i 行が a 倍される $m \times m$ 行列がある。これは可逆。

3. ある行のスカラー倍を別の行に足す。$c \in R$ をとる。左からかけると、A の i 行を c 倍して j 行に足すという効果のある行列がある。これは可逆。

これらの行列の具体的な形は参考書または線形代数の教科書を参照。「行基本変形」として、一年生で習っているはず。これらの行列 (サイズは m にする) を右から掛けると、行ではなく列に対する基本変形がなされる。これらの基本変形の繰り返しにより、単因子形に変形できれば（左右からの可逆行列の積により単因子形にできることになるので）定理の前半（P, Q の存在）は証明される。

証明は A の行の数・列の数に関する帰納法による。1×1 行列の時には定理は自明である。

A が零行列ならば $s = 0$ で定理は証明されている。そうでないとき、行入れ替え・列入れ替えで $a_{11} \neq 0$ としてよい。これから、行変形・列変形を繰り返して $a_{11} \neq 0$ の条件下で a_{11} を (Euclid 整域の定義に現れる「大きさ」に関して) 減らしていく。（例えば $\mathbb{Z}$ なら絶対値に関して減らしていく。$K[t]$ なら次数に関して減らしていく。）少しでも減れば、「ステップが進んだ」という。Euclid 整域の定義（整列集合に大きさをとる）から、有限回しか減らすことはできない。従って、いずれは減らせなくなる。

(1) 一列目に a_{11} の倍数でない元があるとき次のようにして減らせる。行入れ替えで a_{21} にその元を持ってくる。a_{11}, a_{21} に着目する。a_{11} に a_{21} の R の元倍を足して、Euclid 整域の意味で $(1, 1)$ 成分を a_{21} より小さくできる。次に、小さくなった a_{11} の定数倍を a_{21} に足すことで、a_{21} を a_{11} より小さくできる。これを繰り返すと、a_{11} と a_{21} の間で互除法をやっていることに他ならない。この、互除法をやるときに、成分 a_{11} と a_{21} に着目しながら、「定数倍して相手に足す」という部分を 1 行目と 2 行目の間で、行基本変形として行列に作用させる。互除法の原理により、a_{11} と a_{21} のどちらかの成分が 0 になって止まり、0 でない方は a_{11}, a_{21} の最大公約数 d(単元倍を除いて一意) となる。仮定より、d は a_{11} より真に小さいので、d を $(1, 1)$ 成分に行変形を用いて持ってきて「ステップが進んだ」。

(2) 一行目に a_{11} の倍数でない元があるとき列変形により、上と同じ議論により「ステップが進む」。

(3) 一行目、一列目が全て a_{11} の倍数となったとき一行目の R の元倍を 2 行目から引く、3 行目から引く、をくりかえして一列目を a_{11} 以外全て 0 にできる。そののち、一列目の倍数をほかの列に足すことで一行目を a_{11} 以外全部 0 にできる。

この状態 (*) で、a_{11} によって割り切れていない成分 a_{ij} があるとき、i 行を 1 行に足す基本変形で a_{11} を変えないまま a_{1j} を a_{ij} にできる。すると、上の (2) の状態になって「ステップが進む」。

したがって、ステップが進まなくなるのは (*) の状態でかつ、全ての成分が a_{11} の倍数となったときである。このとき、一行目と一列目をとりさった残りの行列に帰納法を適用すると、単因子形が求まる。$e_1 := a_{11}$ とおき、残りの行列の単因子を $e_2, \ldots, e_s$ とすれば $e_1|e_2$ で、A の単因子形が求まっている。

R が一般の PID の場合上と同じ議論をするが、a_{11} を「小さく」する、という大きさを、整除関係によって定義する。すなわち、$a|b$ かつ b が a の単元倍でないとき、$a < b$ とする。これは、イデアルとして $(a) \supset (b)$ かつ $(a) \neq (b)$ と同値である。

PID はネーター環なので、減少列 $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ は有限列である。(この事実の証明：減少列に対しイデアル $(a_1, a_2, \ldots)$ を生成する b をとれば、任意の a_i に対して $(a_i) \subset (b)$ より $b|a_i$ であり、かつ b は a_i の有限個の R 係数一次結合だからその添え字の最大値 j をとれば $a_j|b$ となるから $a_j|a_i$、$a_j \leq a_i$ となり i は j を超えられない。)

補題 1.4.4. R を PID とする。$x, y \in R$ とする。x, y が生成するイデアル (x, y) は PID の定義よりある d により (d) に一致する (d を x, y の最大公約元という、単元倍を除いて一意に定まる) となったとする。このとき、$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$ で

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるものがある。

証明は、d の定義から $sx + ty = d$ となる s, t が存在する。さらに $(x, y) = (d)$ から $x = x_0 d, y = y_0 d$ とおける。$u = -y_0, v = x_0$ とおけば $ux + vy = 0$ である。$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ の行列式を求めると $sv - tu = sx_0 + ty_0$ である。この右辺を d 倍すると $sx + ty = d$ となる。$d(sv - tu) = d$ となり、$d(sv - tu - 1) = 0$。整域だから $sv - tu = 1$ となり、この行列は $\mathrm{GL}_2(R)$ に入る (補題の証明終わり)。

先の単因子形の存在証明では、a_{11} と a_{21} に着目して左から可逆行列を掛けてそれぞれ $d, 0$ とできるという点で Euclid 性を使っていた。この補題により、このステップは一般の PID で実行できることがわかる。(s, t, u, v からなる $2\times$ 2 行列を左上にもち、残りは対角成分のみが 1 で他は 0 なる行列 (**) を左からかければよい。) a_{11} が真に減る回数は有限個であることも示されているので、単因子形を求めるアルゴリズムは停止する。

系 1.4.5. R を PID とする。$M \in \mathrm{GL}_m(R)$ は、行の単元倍行列、行入れ替え行列と (**) の形の行列の積によりあらわされる。

証明. M に、定理の前半を使うと、PMQ を単因子形にできる。このとき、その証明を使えば P と Q は入れ替え行列と $(**)$ の形の行列の積であらわされる。さて、$M \in \mathrm{GL}_m(R)$ より、その行列式は $R^\times$ であるから単因子は $e_i \in R^\times$, $s = m$ でなくてはならない。P にさらに行の単元倍行列を掛けることにより $e_i = 1$ としてよい、すなわち $PMQ = E_n$ としてよい。このとき移項して $M = P^{-1}Q^{-1}$ であり、これは系を示している。□

定理の後半：単因子形の一意性

補題 1.4.6. R を PID, $A \in M_{m,n}(R)$ とする。$l \leq \min\{m,n\}$ に対し、$d(l,A)$ で「A の l 次小行列式全ての最大公約数」を表す（単元倍の違いを除いて定義される)。このとき、可逆な P, Q に対して $d(l,A)$ と $d(l,PAQ)$ は単元倍しか違わない。

$\{1,\ldots,m\}$ から l 元部分集合 S をとり、$\{1,\ldots,n\}$ から l 元部分集合 T をとると A の l 次小行列が得られる。

証明. 系 1.4.5 により、$d(l,A)$ が A に左から（さらに、右から）行の単元倍行列、行入れ替え行列と (**) の形の行列の三種の行列を掛けたときに変わらないことを示せばよい。左から掛けたときについて考える。右から掛けたときも同様に示せる。

三種の行列のうち、前半二種については、行列式の線形性と交代性から従う。（上記 S, T が全て動くときに、現れる小行列の集合について考える。）最後の種類の行列については、小行列の位置に関して場合わけを行う。考える l 次小行列が、1 行目、2 行目を含まないときには (**) を左からかけても変わらない。両方含むときには、(**) の形の l 次行列がこの小行列に掛け算されるから、行列式は変わらない。片方だけ含むとき、たとえば一行目 $\mathbf{a}_1$ だけを含むときは、l 次小行列は (**) を掛けることによって一行目が $s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ の形に変わり、他の行は変わらない。その行列式は、線形性から「一行目を $\mathbf{a}_1$ とした小行列」（これは元の行列の l 次小行列である）の行列式 ($d(l,A)$ の倍数) の s 倍と、「一行目を $\mathbf{a}_2$ とした小行列」（これは、元の行列の l 次小行列の行を入れ替えたもの）の行列式 (これも $d(l,A)$ の倍数) の t 倍の和であるから、$d(l,A)$ の倍数であることが示される。以上合わせて、P を (**) の形の行列としたときに $d(l,A)|d(l,PA)$ が示される。P の逆行列 P^{-1} も (**) の形をしているので $d(l,PA)|d(l,P^{-1}PA)$ が言えて、$d(l,A)$ と $d(l,PA)$ が単元倍しか違わないことがわかる。 □

この補題から、A の単因子形の一つを M とすると $d(l,A) = d(l,M)$(単元倍を除いて)。単因子形に対しては $d(l,M) = e_1 e_2 \cdots e_l$ であるから（先に述べた l 元集合 S,T において、単因子型 M に対しては $S = T$ でない限り小行列式は 0 となることに注意せよ)、e_i は A により $d(i,A)/d(i-1,A)$ として単元倍を除いて一意に決まる。

系 1.4.7. 商集合 $\mathrm{GL}_m(R)\backslash M_{m,n}(R)/\mathrm{GL}_n(R)$ は、単因子形（単元倍は同一視する）の集合と上の対応により全単射。

1.5 PID 上有限生成加群の構造（有限生成アーベル群の構造）定理

定理 1.5.1. R を PID とする。R 上のランク m ($m < \infty$) の自由 R 加群 M の部分 R 加群 N は、自由 R 加群である。さらに、N の階数は m 以下となる。

m に関する帰納法を用いる。$m = 0$ のときには示すべきことは自明である。$m = 1$ のとき、R の部分 R 加群とはイデアルであり、PID だから単項生成で、0 イデアルでなければ R と同形で自由となる。0 イデアルでもランク 0 の自由 R 加群。

$m-1$ での成立を仮定する。$M \cong R^m$ を横ベクトルとみなし、右端の成分への射影を pr_m とすると

$$0 \to R^{m-1} \to M \overset{\mathrm{pr}_m}{\to} R \to 0$$

なる短完全系列ができる。$\mathrm{pr}_m(N) \subset R$ は R 加群であり、$m=1$ の場合からこれはランク 0 またはランク 1 の自由 R 加群である。

短完全系列

$$0 \to R^{m-1} \cap N \to N \stackrel{\mathrm{pr}_m}{\to} \mathrm{pr}_m(N) \to 0$$

について考える。一般に、$N \to L$ が全射で、L が自由加群とすると、セクションがあることが次のようにしてわかる : L の基底 l_λ $(\lambda \in \Lambda)$ をとる。$N \to L$ が全射なので、各 l_λ の逆像は空でない。選択公理を用いて、逆像の中から n_λ をとる。すると、$L \to N$ であって、$l_\lambda \mapsto n_\lambda$ となる射が（基底の性質から）ただ一つある。これがセクションを与える。

さて、考えている短完全系列においては、右端が自由 R 加群なのでこの議論により分裂し、N はこの短完全系列の右と左の R 加群の直和と同型となる（系 1.3.10）。

左は帰納法の仮定よりランク $m-1$ 以下の自由加群であり、右はランク 1 以下の自由加群である。自由加群の直和は自由 (基底は合併集合でランクは和) で、ランクは $m-1+1=m$ 以下となるので N がランク $m-1$ 以下の自由加群であることが証明された。

なお次で見るように、上の定理で、次元に関する有限性の仮定は実は必要ない。

定理 1.5.2. R を PID とする。自由 R 加群 M の部分 R 加群 N は自由 R 加群である。

証明. M の基底を S とする。S の部分集合 T であって $N \cap \langle T \rangle$ が自由 R 加群であるものを考え、その基底 U を一つ固定する。こうして得られるペア (T, U) の集合を $\mathcal{M}$ であらわす。$\mathcal{M}$ は空集合のペアを含むから空ではない。また、包含関係により帰納的順序集合となっているから、Zorn の補題により極大元 (T_0, U_0) が存在する。いまもし $T_0 = S$ であったとすると、U_0 は $N = N \cap \langle T_0 \rangle$ の基底を与えるから帰結が言える。いまもし $T_0 = S$ ではなかったとすると、$s \in S \setminus T_0$ が存在する。$T_1 := T_0 \cup \{s\}$ とする。短完全系列

$$0 \to \langle T_0 \rangle \to \langle T_0, s \rangle \to \langle s \rangle \to 0$$

を考えて、真ん中を N に制限すると

$$0 \to N \cap \langle T_0 \rangle \to N \cap \langle T_0, s \rangle \to \mathrm{pr}(N) \to 0$$

であるが、$\mathrm{pr}(N) \subset \langle s \rangle \cong R$ は（R が PID であり、その部分加群と同型なので単項イデアルと同型なので）一元生成自由 R 加群であるので、この短完全系列は分裂する。仮定より左端は自由。よって真ん中も自由 R 加群である。とくに、真ん中の基底として、左側の部分 R 加群の基底と、右側の分裂の像の基底の合併がとれるので、U_0 を含む基底 U_1 がとれる。(T_1, U_1) の存在は、極大性に矛盾する。 □

次に証明する有限生成 PID 加群の構造定理の証明の準備として、良く知られた命題を述べる。

命題 1.5.3. R を可換環とする。R-hom $R^n \to R^m$ は（それぞれ縦ベクトルの集合とみなして）ある $A \in M_{m,n}(R)$ を左から掛ける写像に一致する。このような A はただ一つ。言い換えると、

$$M_{m,n}(R) \to \mathrm{Hom}_R(R^n, R^m), \quad A \mapsto A(-)$$

は全単射（実は R 加群として同型）。

問題 1.7. この命題を証明せよ。線形代数で習った証明と同じ証明ができる。

次は、有用な定理である。

定理 1.5.4. （有限生成 PID 加群の構造定理）R を PID とし、M を有限生成 R 加群とする。ある自然数 $r \geq 0$ と R の元の列 $e_1|e_2|e_3|\cdots|e_s$ (注：つまり e_i が e_{i+1} を割り切る) であって、e_1 が単元でなく $e_s \neq 0$ なものが存在して

$$M \cong R^r \oplus R/(e_1) \oplus \cdots \oplus R/(e_s)$$

と R 加群として同形となる。このような r は一意に定まり、M の（自由）ランクという。$e_1, \ldots, e_s$ は、単元倍を除いて一意に定まる。

このとき、M を R 上生成するのに必要な最小生成元の個数は $r+s$ となる。(演習)

証明. **同形の存在** M が m 元で生成されるということと、$R^m \to M$ なる R 加群全射があることとは同値。この全射の核は、定理 1.5.1 により有限生成自由。したがって、

$$0 \to R^n \to R^m \to M \to 0$$

なる短完全系列がある。命題 1.5.3 により、$R^n \to R^m$ は（それぞれ縦ベクトルの集合とみなして）ある $A \in M_{m,n}(R)$ を左から掛ける写像と一致させることができる。単因子形の存在定理 1.4.3 を用いると、ある可逆行列 P, Q により PAQ は単因子形にできる。可換図式であらわすと

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & R^n & \stackrel{A}{\to} & R^m & \to & M & \to & 0 \\
 & & Q\uparrow & & P^{-1}\uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & R^n & \stackrel{\text{単因子形}}{\to} & R^m & \to & E & \to & 0
\end{array}$$

である。ここに、上向きの射は Q, P^{-1} をそれぞれ掛けることにより定義される同形射であり、右端の上向きの射はそこから例 1.3.3 により誘導される射で、同形となる。

ここで、E は、単因子形の形から

$$R/(e_1) \oplus R/(e_2) \oplus \cdots \oplus R/(e_s) \oplus R^{m-s}$$

と同形となる。e_i のうち単元であるものは $R/e_i \cong \{0\}$ となるから取り除いて良く、定理のような表示が与えられた。

一意性の証明 (結構難しい) 同じ M が同様の条件を満たすように $R^{r'} \oplus R/(e'_1) \oplus \cdots \oplus R/(e'_{s'})$ と部分 R 加群に直和分解されたとする。R が整域なので、ねじれ元は部分加群となる。M が上のような表示をもつ R 加群であれば、ねじれ元の全体は $R/e_1 \oplus \cdots \oplus R/e_s$ であらわされる部分となる。ここから M の部分集合としてねじれ部分群が

$$R/e_1 \oplus \cdots \oplus R/e_s = R/(e'_1) \oplus \cdots \oplus R/(e'_{s'}) \tag{1.10}$$

と一致する。従って、M のこのねじれ部分群による商は自由 R 加群であるが、それは R^r とも $R^{r'}$ とも同型である。ランクの一意性 (定理 1.2.18) により $r = r'$ となる。あとは、上の (1.10) が成立しているときに、$s = s'$ かつ $(e_i) = (e'_i)$ を言えばよい。$s = s'$ を証明したのちに、s に関する帰納法により証明する。$s = 0$ の時には自明である。直和因子の個数が s 未満の時に一意性が成立すると仮定する。

主張 1:$s = s'$ **が成立。**一般に (1.10) の形の同形 (ただし $e_1|e_2|\cdots|e_s$ と $e'_1|e'_2|\cdots|e'_{s'}$ は仮定する) があったら $s = s'$ となることを示す。このねじれ加群を改めて M としよう。さて、e_1

は単元でないから、e_1 を含む極大イデアルが R に存在する (系 1.2.19)。R が PID だからこの極大イデアルは (p) と表せる。一般に R 加群 N に対し、イデアル (a) と N の元の積で生成される N の部分 R 加群を aN または $a\cdot N$ と書き、N の a 倍加群という。任意の $a,b\in R$ に対しその最大公約数 d を $(d)=(a,b)$ で定義する (R が PID だから存在し、単数倍を除いて一意にきまる。) $d|b$ より $b/d\in R$ である。

$$a\cdot(R/b)\cong R/(b/d)$$

が成り立つ。これは、$a=a_0d,\ b=b_0d$ と置いたときに a_0 と $b_0=b/d$ が互いに素であり、

$$R\to d\cdot(R/b)\to da_0\cdot R/b$$

$r\mapsto d\bar{r}\to a_0d\bar{r}$ なる合成が $a\cdot R/b$ への全射準同型であること、$d\cdot R/b\cong R/b_0$ であること、この加群における a_0 倍が可逆であること（したがって二番目の射が同型であること)、カーネルが (b_0) であること、から準同型定理により従う。

特に $a,b\in R$ に対し

$$a\cdot(R/b)\cong 0\Leftrightarrow b|a$$

である。

また、R 加群として

$$(R/b)/(a\cdot(R/b))\cong R/(a,b)$$

である。これは、全射の合成 $R\to R/b\to(R/b)/(a\cdot(R/b))$ のカーネルが $(a,b):=\langle a,b\rangle_R$ に一致することと準同型定理から得られる。

M に戻る。M は $R/(e_i)$ の直和に分解されている。このことから、M/pM は $(R/(e_i))/(p\cdot R/(e_i))\cong R/(p,e_i)$ の直和に分解されることがわかる（命題 1.2.20)。$(p)\supset(e_1)\supset\dots$ により、任意の $i=1,\dots,s$ に対して $(p,e_i)=(p)$ となり、各直和因子は $(R/(e_i))/(pR/(e_i))\cong R/p$ と R 加群として同型になる。従って

$$M/pM\cong(R/p)\oplus\cdots\oplus(R/p)\quad s\text{ 個}$$

となる。すなわち、M/pM の体 R/p 線形空間としての次元は s。次に、M/pM の直和分解を e_i' の方で計算する。今度は $(p)\supset(e_i')$ となる保証がない。しかし、$(p)\supset(e_i')$ となる i に対しては再び $(R/(e_i'))/(pR/(e_i'))\cong R/p$ となるし、$(p)\supset(e_i')$ でない i に対しては (p) の極大性より $(p,e_i')=R$ となり、$(R/e_i')/(pR/e_i')=0$ となる。従って、「M の e_i' たちによる直和因子は M/pM で消えるかもしれず、消えなければ R/p と同型」である。従って、M/pM の体 R/p 上の次元は s' 以下となる。これより $s\le s'$。逆に、(e_1') を含む極大イデアル q をとって議論すれば $s\ge s'$。よって $s=s'$。（主張 1 の証明終わり。）

主張２:$(e_1)=(e_1')$。再び R 加群 M を考える。$a\in R$ に対し、aM を考える。(1.10) 式の両辺に a を掛けて比べると

$$a\cdot R/e_1\oplus\cdots\oplus a\cdot R/e_s\cong a\cdot R/e_1'\oplus\cdots\oplus a\cdot R/e_s' \tag{1.11}$$

である。いま d_i を a と e_i の最大公約数とし、$f_i:=e_i/d_i$ とする。

主張：$f_1|f_2|\cdots|f_s$ が成り立つ。$(f_1)\supset(f_2)$ を言えばよい。ここで、$a=b_1d_1$ とおくことができ、$e_1=f_1d_1$ で b_1 と f_1 は互いに素である。そこで、$x\in R$ に対し

$$e_1|xa\Leftrightarrow f_1d_1|xb_1d_1\Leftrightarrow f_1|xb_1\Leftrightarrow f_1|x$$

であるから、

$$(f_1) = \{x \in R \mid\ xa \in (e_1)\}$$

同様にして

$$(f_2) = \{x \in R \mid\ xa \in (e_2)\}$$

である。$(e_1) \supset (e_2)$ であるから $(f_1) \supset (f_2)$ が言えた。

さて、式 (1.11) の左辺は

$$R/f_1 \oplus \cdots \oplus R/f_s$$

と同型となる。同様に d'_i を a と e'_i の最大公約数とし、$f'_i d'_i = e'_i$ と置くと、$f'_1|f'_2|\cdots|f'_s$ であり式 (1.11) の右辺は

$$R/f'_1 \oplus \cdots \oplus R/f'_s$$

と同型になる。これは主張 1 が使える形になっている。今、$a = e_1$ ととれば $d_1 = e_1$, $f_1 = 1$ となり、左辺の直和因子は少なくとも一つ消える。従って、主張 1 により右辺の直和因子も少なくとも一つ消える。$f'_1|f'_i$ だから、$R/f'_i = 0$ と消えるならば f'_i が単元で f'_1 も単元である。すると $e'_1 = f'_1 d'_1$, $d'_1|a = e_1$ なので $e'_1|e_1$ でなければならない。対称的な議論を使えば $e_1|e'_1$ が言えて、$(e_1) = (e'_1)$ である。式 (1.11) において、$(e_1) = (e_i)$ となる第 i 直和因子は 0 となる。また、右辺においては $(e'_1) = (e'_i)$ となる直和因子は 0 となる。そこで、非零直和因子の個数は両辺とも少なくとも一つ減る。直和因子の個数に関する帰納法を用いると、$(f_i) = (f'_i)$ が $1 \leq i \leq s$ について成立する。したがって $(e_i) = (f_i e_1) = (f'_i e_1) = (e'_i)$ となる。 □

系 1.5.5. R を PID とし、M を有限生成 R 加群とすると、

$$M \cong R^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=1}^{l_i} (R/(p_i^{e_{ij}}))^{\mu_{ij}}$$

と表せる。すなわち、相異なる（単元倍で写りあわない）素元 $p_1, \ldots, p_k$ があって、$R/(p_i^{e_{ij}})$ の形の R 加群の直和になり、その重複度は μ_{ij} である ($\mu_{ij} > 0$)。このような標記の仕方は p_i の単元倍と順番の入れ替えを除いて一意。

証明. **存在**上の定理において、R/e_i に対し e_i を素元分解して中国式剰余定理を使うと存在が言える。（e_i と e_{ij} は無関係で、紛らわしい記法でごめんなさい。）**一意性** M において、素元 p に対し、p を何度か掛けると 0 となる部分集合は R 部分加群である。M の p 部分 (p-part) と言う。M が有限個の p に関して、p 部分の直和にただ一通りに分解することを示すことができる。各 p 部分に対して、上の定理の一意性の証明と同様の、しかしより簡単な議論を適応すれば一意性が出る。 □

$R = \mathbb{Z}$ とすると前の定理から次の定理を得る。

定理 1.5.6. （有限生成アーベル群の構造定理ないし基本定理）M を有限生成アーベル群とすると、

$$M \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/(e_s)$$

とあらわせる。ここに、$1 < e_1|e_2|\cdots|e_s$ は 2 以上の自然数であり、r ともども M により一意に決まる。

系 1.5.7. （有限アーベル群の構造定理ないし基本定理）M を有限アーベル群とすると、

$$M \cong \mathbb{Z}/(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/(e_s)$$

とあらわせる。ここに、$1 < e_1|e_2|\cdots e_s$ は 2 以上の自然数であり、M により一意に決まる。e_s はこの加群の元の位数のうち最大のものであり、M の指数 (exponent) ということがある。

これらの結果についても、「素数べき版」があるが割愛する。このような構造定理が重要な理由の一つは、「二つの有限生成 R 加群が同型か否か」を単因子型を求めることにより決定できる点にある。本稿から逸脱するが、トポロジーにおけるホモロジー群はしばしば有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群であり、位相空間のホモトピー不変量である。従って、二つの位相空間のホモロジー群が同じ単因子型をもたないならば、それらはホモトピー同値でないことがわかる。

注意 1.5.8. 有限生成 PID 加群の構造定理 1.5.4 の証明において、実は

$$0 \to R^n \to R^m \to M \to 0$$

における左の単射性は使っていない。従って、M がある R 加群準同型 $R^n \overset{A(-)}{\to} R^m$ の Coker と同型であるとき、その単因子型は A の単因子系を求めることにより与えられる。

1.6 Jordan 標準形

K を体とし、$V = K^n$（たてベクトルの空間）, $A \in M_n(K)$ とする。A を左から掛けることで $A \in \mathrm{End}_K(V)$ （V の K 線形自己準同型の成す環）とみなせる。

環準同型 $K[t] \to \mathrm{End}_K(V)$ であって、t を A にうつし、K の元はスカラー倍に移すものがただ一つある（多項式環の universality)。これにより、V は $K[t]$ 加群となる。（より具体的には、$f(t) \bullet v = f(A)v$ で与えられる。）

以下、$R = K[t]$ と書く。次の R 加群の短完全系列が存在する。

$$0 \to R^n \overset{(tI_n - A)}{\to} R^n \to V \to 0.$$

各 R 準同型の定義を述べる。まず $tI-A$ と書いてある射は、$M_n(K[t])$ の元 $tI-A$ を縦ベクトル R^n に左から掛ける射である。余因子行列 $\widetilde{tI-A}$ と $tI-A$ の積は非零スカラー $\det(tI-A) \in R$ 倍であるから、R の整域性より $tI-A$ は単射である。次に、$R^n \to V$ を記述する。R^n を縦ベクトルとみなしての標準基底を $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ とし、$V = K^n$ の標準基底を $e_1, \ldots, e_n$ とする。$\mathbf{e}_i$ を基底とする一次元自由 R 加群 $R \cdot \mathbf{e}_i \subset R^n$ を考える。すると、R 加群準同型 $R \cdot \mathbf{e}_i \mapsto V$ であって $\mathbf{e}_i \mapsto e_i$ となるものがただ一つ存在する。これは、$g(t) \cdot \mathbf{e}_i \mapsto g(A)e_i$ により与えられる。（一次元自由 R 加群の universality:基底の像を決めると R-hom がただ一つ定まる。）i を動かして直和をとると $f : R^n := \oplus(R \cdot \mathbf{e}_i) \to V$ なる R 加群準同型ができる。$f(\mathbf{e}_i) = e_i$ から、f は全射である。真ん中での完全性を見よう。$\mathbf{e}_i$ の $tI - A$ による像は、$t\mathbf{e}_i - A\mathbf{e}_i$ (ここで $\mathbf{e}_i$ は定義から ${}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in R^n$ であり、$A \in M_n(K) \subset M_n(R)$ により $A\mathbf{e}_i$ が与えられる) である。これを f で V におくると、$t\mathbf{e}_i \mapsto Ae_i$, $A\mathbf{e}_i \to Ae_i$ であるから $f((tI - A)\mathbf{e}_i) = 0$ になる。全ての i で成立するので、$\mathrm{Im}(tI - A) \subset \mathrm{Ker} f$ が成立する。従って

$$R^n/\mathrm{Im}(tI - A) \to R^n/\mathrm{Ker}(f) \cong V$$

なる射を得る。左はしの加群の K 上の次元を考える。$t\mathbf{e}_i - A\mathbf{e}_i \in \mathrm{Im}(tI - A)$ である。これは、R 加群 $R^n/\mathrm{Im}(tI - A)$ において、$t\mathbf{e}_i$ の属する類と $A\mathbf{e}_i$ の属する類が等しいことを示す。$A\mathbf{e}_i$ は $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ の K 係数一次結合であるから、$R^n/\mathrm{Im}(tI - A)$ においては $t\mathbf{e}_i$ の類は $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >_K$ に入る。従って、$t^2\mathbf{e}_i$ もここに入る。よって、$R^n/\mathrm{Im}(tI - A)$ では $R \cdot \mathbf{e}_i$ の像は $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >_K$ に入り、$R^n/\mathrm{Im}(tI - A)$ は K 上 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ の類で生成され、K 線形空間としての次元は n 以下となる。それが、n 次元 K 線形空間 V に K 線形に全射しているので、線形代数の次元定理により同型となる。従って、短完全系列の真ん中の完全性が得られる。(以下では $tI - A$ の単射性は使わない。)

単因子論より

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & R^n & \overset{(tI_n - A)}{\to} & R^n & \to & V & \to & 0 \\ & & Q\uparrow & & P^{-1}\uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & R^n & \overset{\text{単因子形}}{\to} & R^n & \to & E & \to & 0 \end{array}$$

とできる。左と真ん中の上向きの射は R 加群としての同型だから、右の上向きの射 $g : E \to V$ は R 加群の同型である。ここで E は R 加群として定理 1.5.4 の形に同型となる。その形は、$tI_n - A \in M_n(R)$ の単因子形を求めればわかる。さらに中国式剰余定理を用いて、系 1.5.5 の形にも同型である。

さて、いま、$g : E \to V$ なる R 同型が与えられたことになる。(準同型 $K \subset R$ より K 線形同型である。) 従って、特に

$$\begin{array}{ccc} V & \overset{t\cdot(-)}{\to} & V \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ E & \overset{t\cdot(-)}{\to} & E \end{array}$$

なる可換図式が得られる。V の K 線形空間としての標準基底を用いれば、$t \cdot (-)$ の表現行列は A である。従って、E に K 線形空間としての基底をとり $t \cdot (-)$ の表現行列を J とし、g の表現行列を G とすれば $J = G^{-1}AG$ とできる。

ここで、系 1.5.5 により、E は $K[t]/(p(t)^e)$ の形の R 加群と同型である。これらの直和因子は、t 倍について閉じている。従って、それぞれの直和因子において K 線形基底をとりそれをならべれば E の K 線形基底が得られるうえ、t 倍の表現行列は各直和因子における表現行列を対角線上にならべたものとなる。以下、この形の直和因子において、適切な基底をとり t 倍の表現行列を求める。

代数閉体とは限らない場合 $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[t]$ とする。$K[t]/(f(t))$ において、基底 $t^{n-1}, \ldots, t, 1$ をとると、t 倍の K 線形表現行列は

$$A_f := \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

となる。これを同伴行列 (companion matrix) という。(ウソ。通常この行列を逆対角線でひっくり返したものをいう。)

$K[t]/(f(t))^2$ においては、$t^{n-1}f(t),\dots,tf(t),f(t),t^{n-1},\dots,t,1,$ なる基底をとると、

$$\begin{pmatrix} A_f & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ & A_f \end{pmatrix}$$

なる 2 段重ねの表現行列が得られる。$K[t]/f(t)^3$ だと、3 段重ねになる。

系 1.5.5 をもちいた場合、$f(t)$ は既約多項式となる。こうやって、一般の体での標準形が得られる。これを、有理標準形という。

代数閉体のとき：代数的閉体なら既約多項式はすべて一次式である。代数閉体でなくても、次の仮定「$\det(tI-A)$ が R で一次式の積に因数分解される」ならば、Jordan 標準形にできる。$\det(P),\det(Q)$ が単元であるから、特性多項式 $\det(tI-A)$ は単因子 $e_1(t),\dots,e_s(t)$ の積に R の単元倍を除いて一致する。よって、系 1.5.5 に現れる直和因子 $K[t]/(f(t)^e)$ において、$f(t)$ が一次式となる。

このとき、上で見た A_f はサイズ 1 で成分は α となる。$K[t]/(t-\alpha)^m$ においては基底として $(t-\alpha)^{m-1},\cdots,(t-\alpha),1$ を選ぶことで Jordan ブロックを得ることができる。$t-\alpha$ 倍の表現行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

であり、t 倍の表現行列は対角成分 α のサイズ m の Jordan ブロックとなる。以上により、Jordan 標準形の計算は、単因子の計算およびその一次式への因数分解に帰着される。なお、変換行列 G も単因子論の過程で求まっているのであるが、その具体的な形を単因子論の方法で求めるのはしばしば実用的ではない。

第2章　テンソル積

参考書のうち、テンソル代数はやらない予定である。

2.1　テンソル積の定義

定義 2.1.1. R を環、M を右 R 加群、N を左 R 加群とする。L を加群とする。写像 $f : M \times N \to L$ は、次の 3 条件を満たすとき R-balanced map であるという：

1. 任意に $m \in M$ を固定したとき $f(m, -) : N \to L$ は加群準同形
2. 任意に $n \in N$ を固定したとき $f(-, n) : M \to L$ は加群準同形
3. $f(mr, n) = f(m, rn)$ が任意の $r \in R$, $m \in M, n \in N$ について成り立つ。

定義 2.1.2. R-balanced map $\Phi : M \times N \to T$ が M と N の R 上のテンソル積であるとは、次の性質 (universality) を満たすこと：任意の R-balanced map $f : M \times N \to L$ に対し、ある加群準同形 $h : T \to L$ が存在して $f = h \circ \Phi$ となる。また、この性質をもつ h はただ一つである。

しばしば、T のみをテンソル積と言い $M \otimes_R N$ で表す。上の定義から、$M \otimes_R N$ は存在すれば標準的な同形を除いてただ一つである。とはいえ、これでは「同形を除いて」しか定義できないので最初のうちは心許ない。が、なれると大丈夫になる。なお、次の構成法により存在が保証されるので、次を定義に採用すればこんな心配はない。

定理 2.1.3. (テンソル積の構成) 直積 $M \times N$ の代数的構造をわすれ、ただの集合と思う。この元を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群を $\tilde{T}$ とする。すなわち、$\tilde{T}$ は $(m, n) \in M \times N$ の形式的な $\mathbb{Z}$ 係数一次結合の全体である。

$\tilde{T}$ の次の 3 種類の（無限個かも知れない）元

$$\begin{aligned}&(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)\\&(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)\\&(mr, n) - (m, rn)\end{aligned}$$

で生成される部分 $\mathbb{Z}$ 加群を $\tilde{K}$ であらわす。商加群

$$T := \tilde{T}/\tilde{K}$$

と

$$\Phi : M \times N \to T, \quad (m, n) \mapsto [(m, n)]$$

(ここに、[ ] は商加群の類を表す) が、テンソル積を与える。

証明. $M \times N \to T$ が R-balanced map であることは、$\tilde{K}$ の定義から従う。

universality について。今、$f : M \times N \to L$ なる R-balanced map が存在したとする。自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $\tilde{T}$ の universality (定理 1.2.14) により ($M \times N$ が Λ の役割を果たす)

$$M \times N \to \tilde{T} \xrightarrow{\tilde{f}} L$$

なる加群準同形 $\tilde{f}$ で、左端から右端まで合成すると f となるものがただ一つある (*)。ここで、f が R-balanced であるということから、

$$\tilde{f}(m_1 + m_2, n) = f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n) = \tilde{f}(m_1, n) + \tilde{f}(m_2, n)$$

の真ん中の等号が言える。両側の等号は上の (*) から言える。従って、$\tilde{f}$ は T の定義にあらわれる $(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)$ の形の元を L における 0 に移すことが分かる。T を定義する関係式のうち、他の 2 種の元も 0 に移すことが同様に示せるから、商の universality （命題 1.1.11）により $\tilde{f}$ が合成 $\tilde{T} \to \tilde{T}/\tilde{K} \xrightarrow{h} L$ となるような h がある。右から Φ を合成すると

$$M \times N \xrightarrow{\Phi} \tilde{T}/\tilde{K} \xrightarrow{h} L$$

は f となる。このような h はただ一つ。（なぜなら、$\tilde{T}/\tilde{K}$ は $\mathbb{Z}$ 加群として $M \times N$ の像が生成するから。）これは、テンソル積の universality と同じ性質である。 □

注意 2.1.4. $M \otimes_R N$ の universality は、次の全単射性に言い換えられる。いま、$M \times N$ から L への balanced map の集合を $\mathrm{Bal}_R(M \times N, L)$ で表すとする。$\Phi : M \times N \to M \otimes_R N$ を用いて定義される

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, L) \to \mathrm{Bal}_R(M \times N, L),$$

$h \mapsto h \circ \Phi$ が全単射となる。

定義 2.1.5. $(m, n) \in M \times N$ の $M \otimes_R N$ での像 $\Phi(m, n)$ を $m \otimes n$ と書く。$M \otimes_R N$ の元は、この形の元の有限個の和として書かれる。$M \otimes_R N$ から L への加群準同形 h を与えることは、R-balanced map f を与えることと同値 ($f = h \circ \Phi$) なので、f が定める加群準同形 h を

「$m \otimes n \mapsto f(m, n)$」が定める「$h : M \otimes_R N \to L$」

と表現する。

定義 2.1.6. R を可換環とし、M, N, L を R 加群とする。$f : M \times N \to L$ が R 双線形写像 (R-bilinear map) であるとは、次の 2 条件を満たすこと：

1. 任意に $m \in M$ を固定したとき $f(m, -) : N \to L$ は R 加群準同形
2. 任意に $n \in N$ を固定したとき $f(-, n) : M \to L$ は R 加群準同形。

（注：このとき $f(rm, n) = rf(m, n) = f(m, rn)$ が自動的に従う。よって R-balanced。）

定理 2.1.7. 上のテンソル積の定義で、R を可換環とする。すると、$T := M \otimes_R N$ には $r \bullet (m \otimes n) = (rm \otimes n) = (m \otimes rn)$ により R 加群の構造が入り、Φ は R 双線形写像となる。そして、次の universality を満たす：任意の R 双線形写像 $f : M \times N \to L$ に対し、R 加群準同形 $h : T \to L$ が存在して $f = h \circ \Phi$ を満たす。このような h は (f を決めれば) 一意的に決まる。

証明. R 双線形写像は R-balanced であるから、R 加群準同形とは限らないけど加群準同形であるような h であって上の性質を満たすものがただ一つ存在する。ゆえに、ステートメント中の定義により T がちゃんと R 加群となることと、h が R 加群準同形になることを示せばよい。写像 $M \times N \to M \otimes_R N$ を $(m, n) \mapsto (rm) \otimes n$ で定めるとこれは R-balanced map なので、$m \otimes n \mapsto (rm) \otimes n$ を満たす $M \otimes_R N \to M \otimes_R N$ が定められる。これが $r \bullet (-) : T \to T$ である。この作用が R 加群の公理をみたすことは各自確かめられたい。h は加群準同形であるゆえ、h が R-hom であることを言うには R の元倍を保存することを見ればよい。それには、T の R 加群としての生成元である $m \otimes n$ たちについて、R の元倍の保存を見ればよい（なぜでしょう）が、

$$h(rm \otimes n) = h(\Phi(rm, n)) = f(rm, n) = rf(m, n) = rh(\Phi(m, n)) = rh(m \otimes n)$$

より従う。 $\square$

$\Phi(m, n) = m \otimes n$ の bilinearity より、$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$ などが従う。

以下、簡単のために可換環を扱う。$\otimes_R$ の R は、明白なときには省略される。

命題 2.1.8. R を可換環とする。$\cong$ は、R 加群の (標準的な) 同形を表す。

1. $R \otimes_R M \cong M \cong M \otimes_R R$
2. $L \otimes_R (M \otimes_R N) \cong (L \otimes_R M) \otimes_R N$
3. $M \otimes N \cong N \otimes M$
4. この項目だけ R を一般の環とし、M_λ を右 R 加群の族、N を左 R 加群とする。

$$(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) \otimes_R N \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (M_\lambda \otimes_R N)$$

最後の式により、たとえば M が b_λ を基底とする右自由 R 加群であれば $\mathbb{Z}$ 加群の同形を得る：

$$M \otimes_R N \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \otimes N$$

(ここに、$b_\lambda \otimes N := \{b_\lambda \otimes n | n \in N\}$)。特に、R が可換で M, N がそれぞれ基底 b_λ $(\lambda \in \Lambda)$ c_μ $(\mu \in \mathcal{M})$ をもつ R 自由加群ならば $M \otimes N$ は $b_\lambda \otimes c_\mu$ $((\lambda, \mu) \in \Lambda \times \mathcal{M})$ を基底とする R 自由加群である。

証明. この命題に現れるステートメントは、すべてテンソル積の universality から機械的に得られる。最後の項目だけ、略証を与える。まず

$$\varphi : (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) \times N \to \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (M_\lambda \otimes_R N)$$

を $\varphi(\oplus_\lambda m_\lambda, n) = \oplus_\lambda (m_\lambda \otimes n)$ で定義すると balanced map になることは機械的に確かめられる。テンソル積の universality を与える $\Phi : (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) \times N \to (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) \otimes_R N$ により

$$h : (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) \otimes_R N \to \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (M_\lambda \otimes_R N)$$

なる $\mathbb{Z}$ 準同型が得られる。h は $h\Phi = \phi$ を満たすから $h((\oplus_\lambda m_\lambda)\otimes n) = (\oplus_\lambda(m_\lambda \otimes n))$ を満たす。ここで、左辺の加群の元として $(\iota_\lambda(m_\lambda)\otimes n)$ を考えると、左辺の加群はこれらの形の元で $\mathbb{Z}$ 加群として生成される ($M_\lambda \otimes N$ も生成されている) から、h は $h(\iota_\lambda(m_\lambda)\otimes n) = \iota_\lambda(m_\lambda \otimes n)$ を満たすただ一つの加群準同型である。次に、

$$h' : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda \otimes_R N) \to (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \otimes_R N$$

なる加群準同型を次のように構成する。直和の定義から、h' をあたえるには

$$h'_\lambda : M_\lambda \otimes_R N \to (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \otimes_R N$$

を各 λ で与えれば良く, これを $h'_\lambda(m_\lambda \otimes n) := \iota_\lambda(m_\lambda) \otimes n$ でさだめることができる。写像 $(m_\lambda, n) \mapsto \iota_\lambda(m_\lambda)\otimes n$ が balanced map だからである。これにより $h'(\iota_\lambda(m_\lambda \otimes n)) = \iota_\lambda(m_\lambda)\otimes n$ が従う。h と h' が互いに逆射であることはこれらの生成元が（生成元が良く似た記法になっているので紛らわしいが）互いに移りあっていることより従う。 □

2.1.1 米田の補題

同じ命題 2.1.8 の 4 を次のように証明することもできる。説明が長くなるが、一般性のある証明手法なのでここで紹介しておく。

定義 2.1.9. $\mathcal{C}$ をカテゴリー、Y をその対象とする。$A \mapsto \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Y, A)$, $f : A \to B$ に対し $f \circ (-) : \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Y, A) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Y, B)$ により、$\mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$ という $\mathcal{C}$ から Sets への関手を得る。この関手を、Y に付随する米田関手といい、$\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Y, -)$ であらわす。

注意 2.1.4 にあらわれた

$$\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M \otimes_R N, L) \to \mathrm{Bal}_R(M \times N, L) \tag{2.1}$$

において、左辺は L を変数とする米田関手である。右辺も関手である。そして、この全単射は「関手間の同型」となるのであるが、この概念を定式化するために関手間の準同型の概念である「自然変形」を導入する。

定義 2.1.10. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ をカテゴリー、$F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を二つの関手とする。F から G への自然変形 (natural transformation) $\tau : F \dot{\to} G$ とは、$\mathcal{C}$ の各対象 A に対し材料として $\mathcal{D}$ の射 $\tau_A : F(A) \to G(A)$ が与えられて、任意の $\mathcal{C}$ の射 $f : A \to B$ に対し図式

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \overset{\tau_A}{\to} & G(A) \\ F(f)\downarrow & \circlearrowleft & G(f)\downarrow \\ F(B) & \overset{\tau_B}{\to} & G(B) \end{array} \tag{2.2}$$

が可換であること。自然変形の合成の概念および恒等自然変形 $\mathrm{id}_{F(A)}$ の概念は自然に定義される。関手を対象とし、自然変形を射として、$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手のなすカテゴリー $\mathcal{D}^\mathcal{C}$ が定義される。このカテゴリーでの同型を「自然同型」と呼ぶ。

式 (2.1) において、左辺は米田関手、右辺も R 加群の圏から Sets への関手とみなせる。そして、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, -) \to \mathrm{Bal}_R(M \times N, -)$ は関手の自然同型を与える。米田関手と自然同型な関手を表現可能関手とよぶ。$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$ と自然同型な関手は、Y で表現される、という。この用語を使えば、「$M \otimes_R N$ は関手 $\mathrm{Bal}_R(M \times N, -)$ を表現する対象である」という形でテンソル積の定義を行うことができる。より正確には、次の米田の補題によりこの手法が正当化される。

定理 2.1.11. (米田の補題　Yoneda's Lemma.) $\mathcal{C}$ をカテゴリー、Sets を集合のカテゴリー、$F : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$ を関手、A, Y を $\mathcal{C}$ の対象とする。

1. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}^{\mathcal{C}}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -), F) \cong F(Y)$ が成立する。Y を変数と見ることで両辺を $\mathcal{C}$ から Sets への関手とみなしたとき、この対応は自然同型を与える。

2. とくに $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ とおいたとき、
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}^{\mathcal{C}}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$$
である。

3. Y に対し $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -))$ を対応させると上の対応は $\mathcal{C}$ から $\mathrm{Sets}^{\mathcal{C}}$ への反変関手を与えるが、これは充満忠実関手である。(米田の埋め込み関手 Yoneda's embedding functor という。) 従って、ある関手を表現する対象は、存在すれば同型を除いてただ一つ。

証明. 1. $\tau : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \dot{\to} F$ に対して $\tau(\mathrm{id}_Y) \in F(Y)$ を対応させる。この逆対応は、$x \in F(Y)$ に対して $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \mapsto F(f)(x) \in F(A)$ により与えられる。自然同型であることのチェックは、読者に任せる。2. は、1. から従う。3. について。最後の主張だけ信じておけばここでは十分であるが、概念の解説もかねて説明する。$\mathcal{C}$ に対し、その逆カテゴリー $\mathcal{C}^{op}$ を、対象は $\mathcal{C}_{obj}$ とし、射を
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$$
で定義する。合成を $g \circ_{\mathcal{C}^{op}} f := f \circ_{\mathcal{C}} g$ で定義し、恒等射は $\mathcal{C}$ の恒等射とするとカテゴリーになる。$\mathcal{C}^{op}$ からカテゴリー $\mathcal{D}$ への関手を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への反変関手 (contravariant functor) という。

関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が忠実 (faithful) であるとは、それが与える写像
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$
が任意の対象 A, B に対して単射であることであり、充満忠実 (fully faithful) であるとは全単射であることを指す。

3. の主張のうち、$Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$ が反変関手であることは機械的に確かめられる。これが充満忠実であることは 2. から従う。充満忠実関手 F に対し、$F(f)$ が同型ならば f は同型である。これを示そう。$F(f)$ の逆射は、F の充満性から $F(g)$ の形をしており、$F(f \circ g) = \mathrm{id}$ と F の忠実性から $f \circ g = \mathrm{id}$ である。同様に $g \circ f = \mathrm{id}$ なので、f は逆射 g をもち同型となる。

こうして、3. の主張の充満忠実性から、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \dot{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ が同型ならば対応する $A \to Y$ は同型である。従って、ある関手を表現する対象は、存在すれば同型を除いてただ一つである。 □

こうして、テンソル積 $M \otimes_R N$ は、式 (2.1) に現れる「関手 $\mathrm{Bal}_R(M \times N, -)$ を表現する対象」として同型を除いて一意に決まることがわかる。また、二つの対象が同型であることを示すのに、それが表現する関手が自然同型であることに帰着することができる。

そのような例として、命題 2.1.8 の 4 の別証を与えてみよう。まず、直和の定義から

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, L) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(\bigoplus M_\lambda, L)$$

である。これは L についての自然同型である。次に、N が左 R 加群、L が加群であるとき、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, L)$ は $f(-) \mapsto f(r \cdot (-))$ によって右 R 加群になる。そして、

$$\mathrm{Bal}_R(M \times N, L) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, L)), \quad f \mapsto \text{「}m \mapsto f(m, -)\text{」}$$

は L に関する自然同型である。これらを用いると

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}((\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \otimes_R N, L) \\
\cong\ & \mathrm{Bal}_R((\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \times N, L) \\
\cong\ & \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, L)) \\
\cong\ & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, L)) \\
\cong\ & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Bal}_R(M_\lambda \times N, L)) \\
\cong\ & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_\lambda \otimes_R N, L)) \\
\cong\ & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\oplus_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda \otimes_R N), L))
\end{aligned}$$

なる自然同型の列を得る。米田の補題から、所望の同型

$$(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \otimes_R N \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda \otimes_R N)$$

を得る。

2.1.2 テンソル積の性質

命題 2.1.12. R を環とする。右 R 加群の準同形 $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ と（左）R 加群 N に対し、加群準同形 $M_1 \otimes_R N \xrightarrow{h} M_2 \otimes_R N$ であって $h(m \otimes n) = f(m) \otimes n$ となるものがただ一つ定まる。h を $f \otimes N$ あるいは $f \otimes \mathrm{id}_N$ で表す。

注意 2.1.13. 右 R 加群準同形の列 $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ のとき、$(g \circ f) \otimes N = (g \otimes N) \circ (f \otimes N)$ が簡単に確かめられる。また、$\mathrm{id}_{M_1} \otimes N = \mathrm{id}_{M_1 \otimes N}$ である。すなわち、$- \otimes N$ は R 加群のカテゴリーから加群のカテゴリーへの関手 (functor) である。

注意 2.1.14. R を環とする。右 R 加群準同形 $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ と左 R 加群準同形 $N_1 \xrightarrow{g} N_2$ が与えられたとき、加群準同形

$$M_1 \otimes_R N_1 \xrightarrow{f \otimes g} M_2 \otimes_R N_2$$

が $(f \otimes g)(m_1 \otimes n_1) := f(m_1) \otimes g(n_1)$ で与えられる。なお、この「与えられる」は、定義 2.1.5 参照。

命題 2.1.15. (テンソル積の right exactness) N を (左)R 加群とする。

$$M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

が右 R 加群の完全系列であれば、$\otimes_R N$ して得られる

$$M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N \to M_3 \otimes N \to 0$$

は加群の完全系列である。

証明. 真ん中から右への写像が全射であることは、テンソル積の構成法における生成元のレベルで全射であることから従う。

真ん中の exactness を言うのには、$M_3 \otimes N$ が左の Coker になっていることを言えばよい。すなわち、$f : M_2 \otimes N \to L$ (*) であって、合成 $M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N \to L$ が 0 であれば (**)、$M_3 \otimes N$ を経由すること (***) を示す。(*) は $M_2 \times N \to L$ なる balanced map と一対一。合成 (**) と対応する balanced map は $M_1 \times N \to M_2 \times N \to L$. 対応は一対一だからこの合成が 0 写像。これは f が $M_2/M_1 \times N \to L$ なる R-balanced map を経由していることを示す。$M_3 \cong M_2/M_1$ を用いてテンソル積の言葉にもどすと、所望の結果を得る。 □

注意 2.1.16. ・この性質を「関手 $\otimes_R N$ は右 R 加群の圏から加群の圏への**右完全**関手 (right exact functor) である」という。

・R 加群準同形の列の完全性は、加群準同形の列としての完全性と同値である。

・R を可換環とする。この場合、$\otimes_R N$ は R 加群の圏からそれ自身への right exact functor である。

上の右完全性は、

$$(M_2/M_1) \otimes N \cong (M_2 \otimes N)/(\mathrm{Im}(M_1 \otimes N))$$

とも言い換えられる。ここに、右の Im は $M_2 \otimes N$ における像を示している。

例 2.1.17. R を可換環、I をそのイデアルとすると $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ なる短完全系列を得る。任意の R 加群 M に対し、テンソル積をとると

$$I \otimes M \to R \otimes M \to (R/I) \otimes M \to 0$$

なる完全系列を得る。ここで、真ん中の R 加群は M と同形である。そこでの左端の加群の像は

$$IM := \langle am | a \in I, m \in M \rangle_R$$

に一致する。従って

$$(R/I) \otimes M \cong M/IM, \quad [r] \otimes m \mapsto [rm]$$

である。

特に、J も R のイデアルとするとき $R/I \otimes_R R/J \cong (R/J)/(I(R/J))$ で、$R \to (R/J)/(I(R/J))$ は全射でカーネルが $I + J$ となること (なぜでしょう) から

$$R/I \otimes_R R/J \cong R/(I + J).$$

命題 2.1.18. R を可換環とし、$M_1 \subset M$, $N_1 \subset N$ を部分 R 加群とする。$M \otimes_R N \to (M/M_1) \otimes_R (N/N_1)$ の核は、$M_1 \otimes N \to M \otimes N$ および $M \otimes N_1 \to M \otimes N$ の像の和に一致する。すなわち

$$(M \otimes N)/(\mathrm{Im}(M_1 \otimes N) + \mathrm{Im}(M \otimes N_1)) \cong (M/M_1) \otimes (N/N_1)$$

証明. 像のそれぞれが核に入ることは容易。よって和も核に入る。すると、左から右への準同形が作られる。逆に、$[m] \in M/M_1, [n] \in N/N_1$ に対して $[m \otimes n] \in (M \otimes N)/(\mathrm{Im}(M_1 \otimes N) + \mathrm{Im}(M \otimes N_1))$ を対応させる写像を考える。$M \times N$ 上定義された写像が $M/M_1 \times N/N_2$ を経由する well-definedness のチェックは容易で、R 双線形になることも確かめられ、$(M/M_1) \otimes (N/N_1)$ の universality から右から左への準同形が作られる。これらが逆射になることは各自チェック。 □

定義 2.1.19. R を単位的環とする。R の中心 $Z(R) \subset R$ とは、「R の元で、R の任意の元と積について可換」なものがなす R の部分環。単位的可換環となる。

K を単位的可換環とする。環準同型 $K \to Z(R)$ が与えられているとき、R を K 多元環 (あるいは K 代数、K-algebra、あるいは K 上の環, ring over K) という。R が可換なときは K 多元環と言わないことが多い。

例 2.1.20. K を可換環とするとき、$M_n(K)$ は（$K \to M_n(K)$, $a \mapsto aI_n$ により）K 多元環である。

定義 2.1.21. $K \to R_1$, $K \to R_2$ を二つの K 多元環とする。K 多元環としての準同形とは、環準同形 $R_1 \to R_2$ であって、合成 $K \to R_1 \to R_2$ が $K \to R_2$ と一致するもの。K 代数の準同型 (K-algebra homomorphism)、K 上の環としての準同型ともいう。

命題 2.1.22. (多項式環の universality) K を可換環とする。多項式環 $K[t_1, \ldots, t_n]$ は次の universality を持つ。$K \to R$ を K 多元環とし、$r_1, \ldots, r_n \in R$ を積について互いに可換な任意の元とするとき、t_i を r_i に送る K 多元環としての準同型、すなわち

$$\begin{array}{ccc} K & \to & K[t_1, \ldots, t_n] \\ || & \circlearrowleft & \downarrow \\ K & \to & R \end{array}$$

を可換にする $K[t_1, \ldots, t_n] \to R$ が存在し、ただ一つである。（特に、$n = 1$ のときには可換性の条件はない。）

命題 2.1.23. (係数変換) K を可換環とし、R を K 多元環とする。K 加群 M に対し、$M \otimes_K R$ には $r \bullet (m \otimes s) := (m \otimes rs)$ により左 R 加群の構造が入る。$M \otimes_K R$ を、**M の係数の K から R への変換**という。$K \subset R$ のときは **R への係数拡大**という。（R が可換環のとき、スキーム論では）base change とも言う。

注意 2.1.24. 上の $\otimes_K R$ は、K 加群のカテゴリーから R 加群のカテゴリーへの関手である。

命題 2.1.25. K を可換環とする。R, S が K 多元環のとき、$R \otimes_K S$ は K 加群であるが、

$$(r_1 \otimes s_1) \cdot (r_2 \otimes s_2) := r_1 r_2 \otimes s_1 s_2$$

により環となる。$1_R \otimes 1_S$ を単位元とする単位環となり、$k \in K \mapsto k \otimes 1 = 1 \otimes k$ により K 多元環となる。

証明. 単位環 U とは、加群であって、積 $\cdot$ が定義されてモノイドとなり、左からの積が誘導する $U \to \mathrm{Map}(U,U)$ が $U \to \mathrm{End}_+(U)$ を引き起し、加群準同形かつ積についてモノイド準同形となる、という定義であった。(End_+ は加群としての自己準同型のなす環。) $(r\cdot(-))\otimes(s\cdot(-)) \in \mathrm{End}_K(R\otimes S)$ は

$$R \times S \to \mathrm{End}_K(R\otimes S)$$

を与える。K-bilinear だから K 加群準同形

$$R \otimes S \to \mathrm{End}_K(R\otimes S)$$

を与える。これが積モノイド準同型であることのチェックは面倒だが易しい。 □

例 **2.1.26.** 多項式環のテンソル積。K 多元環として $K[x]\otimes_K K[y] \cong K[x,y]$ が成立する (演習)。

R が可換環のときは、単に $K \to R$ なる環準同型を与えることと R が K 多元環であることとは同じ。このときは、多元環という言葉よりも K 代数あるいは K 上の環という用語がつかわれる。

例 **2.1.27.** 例 2.1.17 の同型 $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J)$ は、R 代数としての同型である。

命題 **2.1.28.** A, B, C を可換環とし、$A \to B$, $A \to C$ なる環準同型が与えられているとする。このとき、

$$B \to B\otimes_A C \leftarrow C,$$

$b \mapsto b\otimes 1, 1\otimes c \leftarrow c,$ は push out(pull back の双対概念) である。

すなわち、この二つの射は (単位的) 可換環の準同形であり、

$$\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ C & \to & B\otimes_A C \end{array}$$

は可換な square を為し、次の universality を満たす。任意の可換環 D と環準同型 $B \to D$, $C \to D$ で

$$\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ C & \to & D \end{array}$$

が可換なとき、$h : B\otimes_A C \to D$ であって合成 $B \to B\otimes_A C \to D$ が与えられた $B \to D$ に一致し、合成 $C \to B\otimes_A C \to D$ が与えられた $C \to D$ に一致するものが存在する。そして、そのような h はただ一つである。

証明. とりあえず省略したい。(演習) □

2.2 平坦加群・射影的加群・単射的加群

2.2.1 平坦加群

R を環、N を R 加群とする。注意 2.1.13 により、$(-)\otimes_R N$ は右 R 加群のカテゴリーから加群のカテゴリーへの関手であった。命題 2.1.15 から、この関手は右完全系列（短完全系列から左

端の $0 \to$ を落とした系列）を右完全系列に移す。このような関手を right exact functor といった。より強く、短完全系列を短完全系列に移すような関手は exact functor という。$(-)\otimes_R N$ が exact functor となるような N を平坦 R 加群 (flat R-module) という。平たく言えば：

定義 2.2.1. R を可換環とし、N を R 加群とする。右 R 加群の任意の短完全系列

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

に対し、$\otimes_R N$ して得られる

$$0 \to M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N \to M_3 \otimes N \to 0$$

が完全であるとき、N を平坦 R 加群という。

命題 2.1.15 から,　この条件は次のように言い換えられる：$M_1 \to M_2$ が単射なら、$M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N$ も単射。どこらへんが「平らな感じ」なのかは、僕は分かっていない。

例 2.2.2.

1. R は R 加群として平坦。次を使えば、（R の直和と同形であるから）自由 R 加群はみな平坦。
2. N_λ $(\lambda \in \Lambda)$ がそれぞれ平坦ならば $\oplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ も平坦。(命題 2.1.8 の 4 番を使う。次の命題も同じ方法で証明できる。)
3. 上の逆が成立。すなわち平坦 R 加群の直和因子は全て平坦。

定理 2.2.3. R を環、N を R 加群とする。以下の条件は同値。

1. N は平坦
2. 任意の右 R 加群の埋め込み $M_1 \subset M_2$ に対し、$M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N$ が単射
3. 任意の有限生成右 R 加群 M_2 とその有限生成右 R 部分加群 $M_1 \subset M_2$ に対し、$M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N$ が単射
4. R の任意の右イデアル $I \subset R$ に対し、$I \otimes N \to R \otimes N$ が単射
5. 任意の R 加群の短完全系列

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

と右 R 加群 S に対し、

$$0 \to S \otimes L \to S \otimes M \to S \otimes N \to 0$$

は短完全系列。

証明. $1 \Leftrightarrow 2$ は right exactness から。$2 \Rightarrow 3$ は自明。

$3 \Rightarrow 2$: 今、2 を否定して、ある $M_1 \subset M_2$ が存在して $\otimes_R N$ すると単射でなくなるとする。$M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N$ の核に入る元 x は $m_j \otimes n_j$ の形の元の有限和 $x = \sum m_j \otimes n_j$ である（$m_j \in M_1$）。いま、ここに現れる m_j たちが R 上生成する M_1 の（有限生成）部分加群を

$M_1' \subset M_1$ とする。$M_1' \otimes N$ には $x' = \sum m_j \otimes n_j$ と書かれる元があり、その $M_1 \otimes N$ での像は x になっている。

さて、x の $M_2 \otimes N$ での像が零になるということは、テンソル積の構成的定義 (定理 2.1.3) にあらわれた「関係式」部分加群 $\tilde{K}$（M として M_2 をとる）の中に $\sum(m_j, n_j) \in \tilde{T}$ が含まれるということになる。ということは、$\tilde{K}$ に現れた 3 種類の元たちの有限個の和で表されることになる。これら「使われた関係式」にあらわれる M_2 の元は有限個である。

そこで、M_2 において、m_j たちに加えてこれらにあらわれた M_2 の元を合わせたもの（それでも有限個）で生成される M_2 の有限生成部分加群を M_2' とする。作り方から、x' の $M_2' \otimes N$ での像は ($M_2' \otimes N$ を定義する際に使われる「関係式 $\tilde{K_2'}$」に入るので)0 になる。従って、$M_1' \otimes N \to M_2' \otimes N$ において、x' の像は 0 になる。3 を仮定すれば、有限生成 R 加群においては単射性が言えるのでここから $x' = 0$。従って、その像である $x = 0$ となる。（背理法を使おうとしたが、使わなくてすんだ。）

$2 \Rightarrow 4$ は自明。

$4 \Rightarrow 3$: 4 の成立を仮定する。3 において、M_2/M_1 が R 上 1 元生成の時に帰着する。なぜならば、M_2 は有限生成だから M_2/M_1 も有限生成である。このことから、

$$M_1 = L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n = M_2$$

なる部分加群の列で、各 L_{i+1}/L_i が R 上 1 元生成となるものがある。この場合に

$$L_i \otimes N \to L_{i+1} \otimes N$$

の単射性が言えれば、単射の合成は単射ゆえ $M_1 \otimes N = L_1 \otimes N \to L_n \otimes N = M_2 \otimes N$ も単射であり、証明が終了する。

以下、M_2/M_1 が 1 元生成であると仮定する。図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & I & = & I & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M_1 & \to & C & \to & R & \to & 0 \\
 & & || & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M_1 & \to & M_2 & \to & R/I & \to & 0
\end{array}$$

を下の行から次のように構成する。右下端は商 M_2/M_1 であり、一元 $b \in M_2/M_1$ で生成されるので $M_2/M_1 = b \cdot R$ であり、$R \to b \cdot R$ の核を I とすると $M_2/M_1 \cong R/I$。こうして最下行の完全系列を得る。次に、$R \to R/I$ なる、右端の縦の射をつくり、C を

$$C := \{(m_2, r) \in M_2 \times R \mid m_2 \text{ の } R/I \text{ での像が } r \text{ のそれと一致}\}$$

とおく (pullback, 演習 2-13)。$M_2 \to R/I$ の全射性と pullback の構成法から $C \to R$ は全射となり、その核は M_1 と同形になる（演習 2-14）。こうして、上の図の中段の行の完全系列が得られる。右端の縦の完全系列は自明に存在する。再び演習 2-14 より、右下の square が pull back であることを使うと $C \to M_2$ の核は I と同形となることがわかる。これで上の図式ができあがる。

ここで、R は自由加群であるから中段の行は split し、C は M_1 と R の直和と同形になる。従って、上の行は $\otimes N$ したあとでも（分裂した）完全系列である。ゆえに、

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & I\otimes N & = & I\otimes N & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M_1\otimes N & \to & C\otimes N & \to & R\otimes N & \to & 0 \\
 & & || & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M_1\otimes N & \to & M_2\otimes N & \to & R/I\otimes N & \to & 0
\end{array}$$

ここで、中段の左の 0 は完全系列が split するために成立。右上の 0 は 4. の仮定から成立。

左下 $M_1 \otimes N$ の元で、$M_2 \otimes N$ で 0 に写るもの x をとる。左縦の等号から、x は $\bar{x} \in C \otimes N$ に写される。$\bar{x} = 0$ であることが言えれば、中段の行の左の完全性から x 自身が 0 であり、証明は終了する。ところで、$\bar{x}$ の下への像、すなわち $M_2 \otimes N$ での像は x の像で仮定より 0 である。ど真ん中の縦の完全性より、$\bar{x}$ は $I \otimes N$ の元 $\tilde{x}$ の像である。ところで、左から来ていることにより $\bar{x}$ の右 $R \otimes N$ での像は 0 であるから、$\tilde{x}$ の $R \otimes N$ での像は 0 である。ここで 4. の仮定より $I \otimes N \subset R \otimes N$ は単射であるから、$\tilde{x}$ 自身が 0 であり、その像である $\bar{x}$ も 0 となり、証明は終わった。

5. について：直接的な証明はやや長い。また、ホモロジー代数で言う $\mathrm{Tor}_1(S, N)$ を習うと証明の見通しが良くなるのでここでは省略する。 □

命題 2.2.4. (平坦性は base change で保たれる) R を可換環、S を可換 R 代数とする。N が平坦 R 加群ならば $N \otimes_R S$ は平坦 S 加群。

証明. 示したいことは $\otimes_S(N \otimes_R S)$ の完全性だが、命題 2.1.8 の 2 番、3 番、1 番によれば $M \otimes_S (N \otimes_R S) \cong (M \otimes_S S) \otimes_R N \cong M \otimes_R N$ より $\otimes_R N$ の完全性から従う。 □

定理 2.2.5. R を可換環とする。N_1, N_2 が平坦 R 加群ならば $N_1 \otimes N_2$ も平坦。

証明. 命題 2.1.8 の 2 番、associativity によれば、$\otimes N_1$ をほどこして次に $\otimes N_2$ を施すことと、$\otimes(N_1 \otimes N_2)$ を施すこととは自然に同形である。それぞれのステップが exact sequence を保つから、合成も exact である。 □

注意 2.2.6. カテゴリーの言葉を使えば、「exact functor の合成は exact である」という事実より従う。

命題 2.2.7. R を整域、M を R 加群とする。M が平坦ならば、M のねじれ元は 0 のみ (torsion free) である。もし、R が PID ならば、逆も成立する。すなわち、M が torsion free ならば平坦である。

証明. 前半：$a \in R$ とする。このとき、a 倍するという写像 $R \overset{a(-)}{\to} R$ は R の可換性より R 準同形である。$a \neq 0$ ならば（整域なので）これは単射である。これに $\otimes M$ をすると、$M \cong R \otimes M \to R \otimes M \cong M$ は a を左からかけるという写像になる。平坦性より、これは単射である。これは、M においてねじれ元が 0 のみであることを示している。

後半：M の任意の有限生成部分 R 加群 M' は torsion free だから PID 上有限生成加群の基本定理 1.5.4 により自由 R 加群である。特に平坦である。ここから M の平坦性が定理 2.2.3 の証明と同様に、次のようにして従う。いま、$N_1 \to N_2$ を R 加群の単射とする。

$$N_1 \otimes M \to N_2 \otimes M$$

の核の元を任意にとり $x := \sum n_i \otimes m_i$ とする。この元の $N_2 \otimes M$ での像が 0 だから、テンソル積の構成的定義 (定理 2.1.3) にあらわれた「関係式」部分加群 $\tilde{K}$ に $\sum(n_i, m_i) \in \tilde{T}$ が含まれる。この元を $\tilde{K}$ 内で表すのに使われた M の元は有限個である。これらと m_i たちで生成された M の有限生成部分 R 加群を M' とすると、作り方から $N_1 \otimes M'$ の元としての $x' := \sum n_i \otimes m_i$ は $N_1 \otimes M' \to N_2 \otimes M'$ の核に入る。仮定より、これは 0。したがって、x' の $N_1 \otimes M$ における像である x も 0。ゆえに M の平坦性が言えた。 □

定理 2.2.8. (商環の平坦性) R を可換環、S を積閉集合（すなわち、積に関する R の部分モノイド）とするとき、商環 $S^{-1}R$ が定義される。これは可換な R 代数、特に R 加群である。これが R 加群として平坦である。

証明. 定義を復習すれば、証明は直線的。省略したい。 □

注意 2.2.9. 平坦性は、関手 $\otimes N$ が exact になることにより定義された。exact の定義は、短完全系列を短完全系列に写すこと、とした。実は、この条件を満たせば、任意の完全系列が $\otimes N$ で完全系列に移されることが比較的容易に証明できる。（任意の完全系列が短完全系列に分解されることを使う。）

2.2.2　射影的加群

R を環、P を R 加群とする。

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

に対し、$\mathrm{Hom}_R(P, -)$ を施して得られる（演習 [1-12]）加群の完全系列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, M_1) \to \mathrm{Hom}_R(P, M_2) \to \mathrm{Hom}_R(P, M_3)$$

がある。このように、短完全系列を（右の全射性は言えないが）左完全系列に移すような関手を左完全関手 (left exact functor) という。

定義 2.2.10. R を環とする。R 加群の任意の短完全系列

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

に対し、$\mathrm{Hom}_R(P, -)$ を施して得られる

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, M_1) \to \mathrm{Hom}_R(P, M_2) \to \mathrm{Hom}_R(P, M_3) \to 0$$

が完全であるとき、P を射影 R 加群 (projective R-module) という。

もともと左完全であるから、P が射影的加群であることと「任意の全射 $M_2 \to M_3$ に対して $\mathrm{Hom}(P, M_2) \to \mathrm{Hom}(P, M_3)$ が全射である」こととは同値。

定理 2.2.11. P を R 加群とする。以下、出てくる対象は R 加群、射は R 加群準同形とする。次は同値。

1. P は射影的。
2. $L \to M$ なる全射があるとき、任意の射 $P \to M$ が L を経由する、すなわちある $P \to L$ があって合成 $P \to L \to M$ が先の射になる。
3. 全射 $f : L \to P$ があるとき、$s : P \to L$ であって $s \circ f = \mathrm{id}_P$ とできる。(このとき、P は L の直和因子と同形となる。)
4. P を右端にもつ短完全系列 $0 \to K \to L \to P \to 0$ は分裂する。

証明. $1 \Leftrightarrow 2$: 2 の帰結は「$\mathrm{Hom}_R(P, L) \to \mathrm{Hom}_R(P, M)$ が全射である」ということの言い換えだから、上の注意により従う。

$2 \Rightarrow 3$:2 で、$M = P$ とし、任意の射として $\mathrm{id}_P : M = P \to P$ をとると、3 になる。(なお、直和因子になることは、$L \to P$ の核を K とすると $0 \to K \to L \to P \to 0$ が分裂することから従う。

$3 \Rightarrow 2$ $f : L \to M$ を全射とし、$g : P \to M$ を任意の射とする。pullback(演習 2-13) $N := L \times_M P$ を考える。f は全射だから、pullback の構成法から $N \to P$ は全射。3. より section $s : P \to N$ がある。ここで $h : P \xrightarrow{s} N \to L$ なる合成射が所望の射を与える。$f \circ h = g$ を確かめればよい。それには合成 $P \xrightarrow{s} N \to L \xrightarrow{f} M$ が $P \xrightarrow{g} M$ と一致することを見ればよい。前者は、pullback square の可換性より $P \to N \to P \to M$ なる合成と同一。s が section だからこれは $P \to M$ と同一なので、後者と同一。 □

次の自明な補題は、ホモロジー代数で有用になる。

補題 2.2.12. 任意の R 加群 M に対し、ある自由 R 加群 F が存在して $F \to M$ なる全射を持つ。M が有限生成ならば F を有限ランクにできる。

証明. M の R 加群としての任意の生成系 m_λ $(\lambda \in \Lambda)$ をとる。極端な話、$\Lambda := M$ とし、$m_\lambda := \lambda$ のように M の全ての元をとってもよい。このとき、x_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を基底とする自由加群 F から、M への全射(準同形)が $x_\lambda \mapsto m_\lambda$ により与えられる。(自由 R 加群の universality。) □

定理 2.2.13.

1. 自由 R 加群は射影的。
2. N_λ $(\lambda \in \Lambda)$ がそれぞれ射影的ならば $\oplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ も射影的。
3. 上の逆が成立。すなわち射影的 R 加群の直和因子は全て射影的。
4. (基本的で有用) P が射影的 R 加群であることと、ある自由 R 加群の直和因子であることは同値。
5. 射影的 R 加群は平坦 R 加群である。

証明. 1. 自由加群 F に全射 $M \to F$ があったとすると、F の基底 b_λ に落ちて来る M の元 m_λ が一つはある。これを任意に一つ選択公理でとってきて、$b_\lambda \mapsto m_\lambda$ なる準同形 $s : F \to M$ (自

由加群の基底の universality より、ひとたび m_λ たちを決めれば一意に存在) をとると、section になっていることがわかるので、定理 2.2.11 の 3 番により射影的。

2. $\iota_\lambda : N_\lambda \to \bigoplus N_\lambda$ を直和の定義にあらわれる injection とし、$\mathrm{pr}_\lambda : \oplus N_\lambda \to N_\lambda$ を λ 成分への全射とする。

$f : M \to \bigoplus N_\lambda$ を全射とする。N_λ が射影的だから $g_\lambda : N_\lambda \to M$ が存在して $f \circ g_\lambda = \iota_\lambda$ とできる。選択公理を使ってそのような g_λ を各 λ についてとる。直和の universality(存在) により $g : \bigoplus N_\lambda \to M$ がとれて $g \circ \iota_\lambda = g_\lambda$ となる。あとは $f \circ g = \mathrm{id}_{\bigoplus N_\lambda}$ を示せばよい。直和の universality(一意性) により各 λ について $f \circ g \circ \iota_\lambda = \iota_\lambda$ を示せばよいが、$g \circ \iota_\lambda = g_\lambda$ より従う。

なお、次のように証明するとより見通しはいい：直和の universality を言いかえると、

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus N_\lambda, M) \cong \prod_\lambda \mathrm{Hom}_R(N_\lambda, M)$$

となる。ここに、左辺の元から右辺の λ 成分へは $h \circ \iota_\lambda$ により写像があり、集合の直積の定義から左辺から右辺に写像がある。これが全単射であることが、直和の universality である。左辺も右辺も、M を動かしたときに関手となっている。このとき、任意の $M_1 \to M_2$ に対して次は可換になる。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(\bigoplus N_\lambda, M_1) & \cong & \prod_\lambda \mathrm{Hom}_R(N_\lambda, M_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_R(\bigoplus N_\lambda, M_2) & \cong & \prod_\lambda \mathrm{Hom}_R(N_\lambda, M_2) \end{array}$$

両辺をこのように関手と見たとき、左辺が全射を保つことが $\bigoplus N_\lambda$ が射影的であることの定義である。これは、右辺の関手の各成分が全射であることと同値。すなわち、各 N_λ がそれぞれ射影的であることと同値。こうすると、2 も 3 も証明されている。

3. P を射影的とし、$P = N \oplus N'$ とする。N が射影的であることを示せばよい。$f : M \to N$ を全射とすると、$M \oplus N' \to N \oplus N' = P$ なる全射が得られる。P が射影的だから $s : P \to M \oplus N'$ なる section がとれる ($(f \oplus \mathrm{id}_{N'}) \circ s = \mathrm{id}_P$)。このとき、自然な射影 $\mathrm{pr}_M : M \oplus N' \to M$ と単射 $\iota_N : N \to N \oplus N'$ により得られる $\mathrm{pr}_M \circ s \circ \iota_N : N \to M$ が $f : M \to N$ の section である。実際 $f \circ \mathrm{pr}_M \circ s \circ \iota_N = \mathrm{pr}_N \circ (f \oplus \mathrm{id}'_N) \circ s \circ \iota_N = \mathrm{pr}_N \circ \iota_N = \mathrm{id}_N$.

4. 直前の補題「自由 R 加群から全射がある」ということから、自由 R 加群 F から $F \to P$ なる全射がある。P が射影的ならば、定理 2.2.11 の 3 番により P は F の直和因子。逆に、P が F の直和因子であれば、1 より F は射影的で 2 より P も射影的。

5. P が射影的 R 加群なら、4 より自由 R 加群の直和因子。自由 R 加群は平坦で、平坦 R 加群の直和因子は平坦 (例 2.2.2) だから従う。

□

定理 2.2.14. R を PID、P を R 加群とする。次は同値。

1. P は射影的
2. P は自由

証明. 自由なら射影的なことはすでにみた。一方、射影的であれば、自由加群の直和因子であり、特に自由加群の部分加群である。定理 1.5.2 （PID 上自由加群の部分加群は自由）により自由加群となる。 □

例 2.2.15. $p, q > 1$ が互いに素な自然数なら $R := \mathbb{Z}/(pq) \cong \mathbb{Z}/(p) \times \mathbb{Z}(q)$ であり、$\mathbb{Z}/(p)$ は R 加群として自由ではないが射影的であり、従って平坦である。

$\mathbb{Z}$ 加群として $\mathbb{Q}$ は torsion free なので平坦である（あるいは商環だから平坦である）。しかし、任意の 2 元が一次従属なので自由ではない。PID では自由と射影的は同値なので、射影的でもない。

注意 2.2.16. 「射影的」(projective) という言葉のニュアンスが僕にはわからないが、「射が出ていく」のが projective であり、「射が入ってくる」のが injective のようである。

2.2.3　単射的加群

R を環、I を R 加群とする。

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

に対し、$\mathrm{Hom}_R(-, I)$ を施して得られる（演習 [1-12]）完全系列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M_3, I) \to \mathrm{Hom}_R(M_2, I) \to \mathrm{Hom}_R(M_1, I)$$

がある。ここで、$\mathrm{Hom}_R(-, I)$ は R 加群を加群に移すが、射 $M_1 \to M_2$ に対しては

$$(-) \circ f : \mathrm{Hom}_R(M_2, I) \to \mathrm{Hom}_R(M_1, I)$$

と、逆向きの射を対応させる。このような対応を反変関手 (contravariant functor) という。関手の定義 (注意 2.1.13) における、材料の 2 番目を

$$F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_o(B), F_o(A))$$

に、公理の 2 番目を

$$F_{A,C}(g \circ f) = F_{A,B}(f) \circ F_{B,C}(g)$$

に取り換えて得られる概念である。

前節と同様に、$\mathrm{Hom}_R(-, I)$ は左完全反変関手であるという。これが完全であるとき、I を単射的 (injective)R 加群という。これは、「$M \to N$ が単射であれば $\mathrm{Hom}_R(N, I) \to \mathrm{Hom}_R(M, I)$ が全射である」とも言い換えられる。前節の議論と全く並列に、次が証明される。より正確に言えば、射の向きをひっくり返して議論を行うことにより証明される。

定理 2.2.17. I を R 加群とする。以下、出てくる対象は R 加群、射は R 加群準同形とする。次は同値。

1. I は単射的。
2. $M \to L$ なる単射があるとき、任意の射 $M \to I$ が L を経由する、すなわちある $L \to I$ があって合成 $M \to L \to I$ が先の射になる。
3. 単射 $f : I \to L$ があるとき、$r : L \to I$ であって $f \circ r = \mathrm{id}_I$ とできる。（このとき、I は L の直和因子と同形となる。）
4. I を左端にもつ短完全系列 $0 \to I \to L \to M \to 0$ は分裂する。

しかしながら、自由 R 加群はたいてい単射的にならない。たとえば、$R=\mathbb{Z}$ のとき $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ は直和因子でないので、$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ 加群として単射的でない。

ここでは深入りしないで、次の定義と定理を述べるにとどめる。「単射的」なる性質は、たとえば（層の）コホモロジー理論に現れる。

定義 2.2.18. R を可換環、M を R 加群とする。R の零因子でない任意の元 a に対して a 倍写像が全射 ($a\bullet(-):M\to M$ が全射) のとき、M を可除 R 加群という。

定理 2.2.19. R を可換環とする。I が単射的 R 加群ならば、I は可除である。R が PID であれば逆も成り立つ。

証明. I が単射的であるとする。$a\in R$ が零因子でないことの定義は、$a\cdot(-):R\to R$ が単射であることである。従って、単射的加群の定義により $a\bullet(-):\mathrm{Hom}_R(R,I)\to\mathrm{Hom}_R(R,I)$ は全射である（これが a 倍であることは、R の可換性を使う）。ここで、$\mathrm{Hom}_R(R,I)\cong I$ （R 加群として同形 : 左辺は 1_R の I での像をみることにより右辺と対応がつく）であり、$a\bullet(-):I\to I$ の全射性が従う。

PID のときは逆が成り立つ。証明はここでは略したい。 $\square$

第3章　Noether 環と Noether 加群

参考書では３章で有限群の表現論を扱っているが、講義では扱わない。表現論そのものを扱わない。しかし、参考書の３章で定義された単純・直既約・完全可約・半単純といった概念は扱う。次章に回す。

3.1　Noether 性

R を (可換とは限らない単位的) 環とする。R の部分集合で、左 R 部分加群となっているものを左イデアルというのであった。特に左右を明示しないときには、左 R 加群を指すことにしていた。いっぽう、「イデアル」というと、通常両側イデアルを指す。このため、イデアルについてはいつも左・右を明示するという非統一的な記述となる。

定理 3.1.1. R 加群 M に対し、次の条件は同値。

1. M の部分 R 加群の集合で、空でないものには包含関係に関して極大元がある。
2. M の部分 R 加群の上昇列
$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \cdots$$
に対し、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在してそこから先は停留する。すなわち $N_n = N_{n+1} = \cdots$ となる。
3. M の任意の部分 R 加群は R 上有限生成である。

証明. $1 \Rightarrow 2$: 2 における上昇列にも極大元がある。それを N_n とすれば、全ての m に対して $N_n \subsetneq N_m$ となることはない。特に、$m \geq n$ では $N_n \subset N_m$ なので、$N_n = N_m$ となるしかない。

$2 \Rightarrow 1$: 2 が成立しているのに、部分 R 加群の空でない集合 S であって、極大元がないものがあったとする。各部分加群 $N \in S$ に対し、（極大でないから）存在する $N \subsetneq N' \in S$ なる N' を（選択公理を使って）一つとる写像を $\varphi : S \to S$ とする。空でないから $N_1 \in S$ がとれる。以下、帰納的に $N_{n+1} := \varphi(N_n)$ と定めれば狭義単調増大する M の部分加群の列が存在する。これは 2 の不成立を示している。

$1 \Rightarrow 3$: M の任意の部分加群 N をとる。N の有限生成部分加群の集合を S とする。零加群を含むので S は空ではない。1 より S には極大元 N_0 が存在する。$N_0 = N$ ならば証明が終わる。$N_0 \subsetneq N$ ならば、$N \setminus N_0$ から任意に一個元 b を持ってくると、$< N_0, b >$ は有限生成で N_0 より真に大きい。これは極大性に矛盾。

$3 \Rightarrow 2$: 2 の上昇列をとる。これら上昇列の合併 $N := \cup_{i=1}^{\infty} N_i$ も部分 R 加群で、3 を仮定したから有限生成。生成元を $b_1, \ldots, b_m$ とすると、b_1 が入る $N_{i(1)}$, b_2 が入る $N_{i(2)}$, $\cdots$, b_m が

入る $N_{i(m)}$ がある。これら $i(1), \ldots, i(m)$ の最大値を n とすれば $N \subset N_n \subset N_{n+1} \subset \cdots \subset N$ となり等号が成立して停留する。 □

上の定理の、同値な最初の二つの性質を順序集合の **Noether 性** (Noetherian property) という。

定義 3.1.2. 左 R 加群 M が上の同値な条件を満たすとき、R 上の左 Noether 加群 (Noetherian module) という。

定義 3.1.3. 環 R が左 R 加群として左 Noether 加群のとき、R を左 Noether 環 (Noetherian ring) という。

次は、上の定理と、「R の左部分 R 加群は左 ideal と同じ概念であること」からただちに従う。

定理 3.1.4. R を環とする。以下は同値。

1. R は左 Noether 環である。
2. R の左イデアルの集合で、空でないものには包含関係に関して極大元がある。
3. R の左イデアルの上昇列
$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \cdots$$
は、ある $n \in \mathbb{N}$ から先は停留する。
4. R の任意の左イデアルは有限生成である。

先にみたとおり、PID は Noether 環である。体も Noether 環である。

命題 3.1.5. R を環、M を左 R-Noether 加群とする。M の任意の部分 R 加群は Noether である。また、M の任意の商 R 加群は Noehter である。

証明. N を部分 R 加群とする。N の部分 R 加群の集合は、M の部分 R 加群の集合のうちで N に含まれるものの全体である。Noether 加群の定義に現れる条件 1（または 2）は、部分集合に遺伝する性質であることが容易に確認できるので、N は Noether である。

一方、「M/N の部分 R 加群全体」は、包含による順序集合の構造を保ちつつ、「M の部分加群であって N を含むもの全体」と自然に 1:1 の対応を持つ。同じコメント (部分集合への遺伝) により、M/N も Noether である。 □

Noether 性は R 加群同型によって保たれる性質である。従って、Noether 加群に単射する、あるいは全射される加群も Noether。

命題 3.1.6. R を環とし、R 加群の短完全系列

$$0 \to N \to M \to L \to 0$$

が与えられたとする。M が Noether $\Leftrightarrow$ N も L も Noether。

証明. $\Rightarrow$: 直前の注意による。$\Leftarrow$ $M' \subset M$ を部分加群とする。このとき、L' を M' の L における像とし、$N' := M' \cap N$ とおくと短完全系列

$$0 \to N' \to M' \to L' \to 0$$

を得る。L', N' は Noether 加群の部分加群だから Noether。従って有限生成。L' の生成元それぞれに対し、全射 $M' \to L'$ による逆像から一個ずつ、（有限個だから選択公理を使う必要なく）選んできて、N' の有限個の生成元とあわせて、それらが生成する M' の部分 R 加群を M'' とする。M'' は N' を含む（生成元を含むから）。一方、M'' は L' に全射する（N' 部分は消えるので、像は L' に入る。生成元の逆像を含むので、全射する）。任意の $m' \in M'$ に対し、その L' での像と一致する $m'' \in M''$ がとれる。$m' - m''$ は $N' \subset M''$ にはいるから、$m' \in M''$ が言えて $M' = M''$。したがって M' は有限生成である。これは M が Noether 加群であることを意味する。 □

系 3.1.7. R が左 Noether 環ならば、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し R^n は左 Noether 加群である。従って、その部分 R 加群も、その商 R 加群も Noether。従って、有限生成 R 加群（は R^n の商 R 加群）も Noehter。

注意 3.1.8. R を左 Noether 環とし、I を左イデアルとする。R/I は R 加群であり、上の命題から R 加群として Noether である。いま、I を両側イデアルとする。R/I の部分 R 加群 M は、自然に R/I 加群である。(I が $R \to \mathrm{End}_+(M)$ の核に入るので。）逆に、R/I の部分 R/I 加群は R 加群であるから、R 加群として Noether なことから R/I 加群として R/I が Noether であることが従う。ゆえに、R/I は左 Noether 環である。つまり「Noether 環の剰余環は Noether 環。」

しかし、R が左 Noether 環であっても、その部分環が左 Noether であるとは限らない。

例 3.1.9. K を体、$p > 1$ を自然数とする。$R := K[X^{1/p^n}; n \in \mathbb{N}]$ なる可換環を考える。この環は、より厳密には $K[X_1, X_2, X_3, \ldots,]$ なる無限生成多項式環を、$(X_1 - X_2^p, X_2 - X_3^p, X_3 - X_4^p, \ldots)$ なる無限生成のイデアルで割って得られる。($X^{1/p^{i-1}} := X_i$ というふうに同一視する。）R において、$X_1, X_2, \ldots$ の全体が生成するイデアルを I とすると、I は有限生成ではない。実際、$I_i := (X_1, \ldots, X_i) = (X_i)$ とおくとこれは真に単調増大なイデアルの無限列となっており、定理 3.1.1 の証明から、その union（合併）は有限生成ではない。

ところで、R は整域である。というのも、$X_1, \ldots, X_n$ で K 上生成される R の部分環は $K[X_n]$ と同形で整域。それらの単調増大な合併も、整域になる。

したがって、R は R の商体に含まれるが、体は Noether 環である。したがって、R は Noether 環の部分環であって Noether 環ではない。

3.2 可換 Noether 環上有限生成な可換環なら Noether

定理 3.2.1. (Hilbert の基底定理)

R を可換 Noether 環とすれば、多項式環 $R[X]$ は Noether 環である。（従って帰納的に、n 変数多項式環 $R[X_1, \ldots, X_n] \cong R[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$ も Noether 環である。）

証明. イデアル $I \subset R[X]$ をとる。これが有限生成であることを言えばよい。$I \neq \{0\}$ としてよい。各自然数 m に対し、I に属する、m 次以下の式の m 次の係数がなす集合を $\mathfrak{a}_m$ とする。$\mathfrak{a}_m$ は R のイデアルとなる。なぜならば、和に閉じていることは「m 次以下の式の和は m 次以下」ということと「多項式の和は次数ごとの係数和」ということから従う。R の元倍に閉じていることは一層やさしい。

$a \in \mathfrak{a}_m$ ならば $aX^m + \cdots$ の形の多項式で I に属するものがある。X 倍することで $a \in \mathfrak{a}_{m+1}$。よってイデアル列 $\mathfrak{a}_m$ は単調に増大する。R が Noether だから、ある N があって $\mathfrak{a}_N$ より先は停留する。各 $1 \leq i \leq N$ に対し、$\mathfrak{a}_i$ は有限生成だから、ちょうど i 次の多項式であって、最高次 i 次の係数が $\mathfrak{a}_i$ を R のイデアルとして生成するような

$$f_1^{(i)}(X), \ldots, f_{r_i}^{(i)}(X) \in I$$

をとれる。これらを $i = 1, \ldots, N$ と動かして得られる有限個の多項式により生成される $R[X]$ のイデアルを I' とする。

$I = I'$ となることを示せばよい。$I' \subset I$ は、I' の生成元が I に入ることから明らか。$g \in I$ が I' に入ることを示す。g の次数に関する帰納法により示す。$g = 0$ のとき ($\deg(g) = -\infty$) には明らか。$\deg(g) \leq m - 1$ で成立を仮定して、$\deg(g) = m$ の時を示す。

$m \leq N$ の場合: g の最高次 $= m$ 次の係数は $\mathfrak{a}_m$ に入る。従って、$f_j^{(m)}(X)$ $(j = 1, \ldots, r_m)$ の最高次の係数の R 線形結合によって g の m 次の項はかける。これは、g から $f_j^{(m)}(X)$ $(j = 1, \ldots, r_m)$ の R 線形結合 (それは I' の元) を引くと、m 次未満の次数を持つ $g' \in I$ にできることを意味する。帰納法の仮定により、$g' \in I'$。従って $g \in I'$.

$m \geq N + 1$ の場合: $\mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}_N$ であるから、上の議論により g の最高次の係数は $f_j^{(N)}(X)$ $(j = 1, \ldots, r_N)$ の最高次の係数の R 線形結合により書ける。同じ係数による $f_j^{(N)}(X)$ の線形結合 h は I' の元であって、h の最高次 $= N$ 次の係数は g のそれに一致する。従って、h に X^{m-N} を掛けて（それは I' の元）g から引いて得られる $g' \in I$ は次数が m より真に小さい。従って帰納法が働く。 □

系 3.2.2. 可換 Noether 環 R 上有限生成な可換環は Noether。

証明. A を R 上の環とする。「$S \subset A$ により R 上の環として生成される A の部分環」とは、S の元および R の元から A の $+, -,$ 積を繰り返して得られる部分環のことである。

いま、S が有限集合 $s_1, \ldots, s_n \in A$ であるとする。さらに、A を可換環とする。多項式環の universality により、$R[X_1, \ldots, X_n] \to A$ なる R 上の環の準同型であって $X_i \mapsto s_i$ となるものが（ただ一つ）存在する。A が S で R 上環として生成されるとすると、A の任意の元は R と S から環の演算を繰り返して得られる。が、可換性から、この元は R 係数で s_i たちを変数とする多項式の形で書けることが従う。ゆえに、$R[X_1, \ldots, X_n] \to A$ は全射である。従って、Noether 環の剰余環だから A も Noether。（なお、全射性と「S が A を R 上の環として生成すること」とは同値である。） □

系 3.2.3. 体上の可換有限生成環は Noether。

第4章　既約性・アルティン性・半単純環

非可換環の例を作るために群環を導入する。有限群の群環上の加群は、有限群の表現論として重要な役割を果たすがこの講義では扱わない。

4.1　群環

R を可換環、G をモノイドとする。G を自由基底とする自由 R 加群を $R[G]$ で表す。その元は、G の元に係数を掛けて有限個足して得られる。

$$(\sum_{\sigma\in G} a_\sigma\sigma)\cdot(\sum_{\tau\in G} b_\tau\tau) := \sum a_\sigma b_\tau(\sigma\tau)$$

と積を定義することで、$R[G]$ は環となる (確認必要)。特に G が群のときは G の R 係数の**群環**という。

例 4.1.1. G が（加法モノイドである）$\mathbb{N}$ と同形なモノイド $\{1, X, X^2, X^3, \ldots\}$ のときには $R[G] \cong R[X]$ (一変数多項式環)、G が（加法群）$\mathbb{Z}$ と同形な群のときには $R[G] \cong R[X, X^{-1}]$。

命題 4.1.2. (群環の universality) R を可換環、G をモノイドとする。任意の R 多元環 S と $G \to (S, \cdot)$ (S の積モノイドへのモノイド準同型) が与えられたとき、R 多元環の射 $h : R[G] \to S$ であって合成 $G \to R[G] \to S$ が与えられたモノイド準同型となるものが存在し、一意的である。

証明. G の行き先を決めると、自由 R 加群の universality より R 加群としての射は決まる。これが R 多元環の準同型となることは、いちいち条件を確かめればよい。 □

系 4.1.3. R を可換環、G をモノイド、V を R 加群とする。（積）モノイド準同型 $G \to \mathrm{End}_R(V)$ を G の V における R 加群表現という。これを与えることと、R 多元環の準同型 $R[G] \to \mathrm{End}_R(V)$ を与えることは同値であり、$R[G]$ 加群 V（であって $R \subset R[G]$ に制限したときに元の R 作用と一致するもの）を与えることとも同値である。

こうして、$R[G]$ 加群 V を与えることと、R 加群 V と G の V への R 加群表現を与えることとは同じである。特に、R が体 K のときには G の K 線形表現という。多くの本で、G が群のときのみを扱っている。この時は**群の K 線形表現**という。これは、**$K[G]$ 加群と言っても**同じ情報である。

4.2　既約、完全可約、直既約

定義 4.2.1. R を環とし、V を R 加群とする。

1. R 加群 $V \neq \{0\}$ が部分 R 加群を V と $\{0\}$ 以外に持たないとき、V を既約 R 加群 (irreducible R-module) という。群論の用語の類似で、単純 R 加群 (simple R-module) ともいう。零加群は既約 R 加群とはみなさない。

2. V の任意の部分 R 加群が直和因子であるとき、V を完全可約 (completely reducible) という。半単純 R 加群 (semi-simple R-module) ともいう。

3. V が $\{0\}$ でない二つの R 加群の直和に同型でないとき、V を直既約 (indecomposable) という。

定義より、既約ならば直既約。

例 4.2.2. R が体 K であるならば、任意の K 加群は自由である。完全可約でもある。K は K 加群として既約。既約な K 加群は K と同形。

R を体でない PID とする。$\mathbb{Z}$ または体上の多項式環 $K[X]$ を想像すれば十分である。V を有限生成 R 加群とすると構造定理の系 1.5.5 により、

$$V \cong R^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=1}^{l_i} (R/(p_i^{e_{ij}}))^{\mu_{ij}}$$

の形の直和となる。各直和因子について考える。R には 0 でない素イデアル (p) がある。これは真部分 R 加群だから、R は既約ではない。しかし、0, R 以外のイデアルは直和因子とはならない（演習 [2-3]）。従って、直既約である。

$p \neq 0$ に対し、$R/(p^e)$ を考える。$e > 1$ のとき、部分 R 加群 $pR/(p^e) \neq \{0\}$ を含むから既約ではないが、直既約であることは容易に確かめられる。

従って、$r = 0$, かつ全ての $e_{ij} = 1$ のとき、V は既約加群の直和となる。逆も成立。（このとき、完全可約になることが示される。後述。）

注意 4.2.3. G を群（モノイドでも良いが）としたとき、G の K 線形表現とは $K[G]$ 加群のことであった。$K[G]$ 加群としての直和、既約、完全可約、直既約といった用語は、そのまま「G の K 線形表現が直和、既約、完全可約、直既約」として用いられる。部分加群は、「G 不変部分空間」とも呼ばれる。

補題 4.2.4. V を R 加群とする。

1. V が既約であれば $0 \neq v \in V$ は V を生成する：$V = R \cdot v$。逆に、任意の $0 \neq v \in V$ が V を生成し $V \neq \{0\}$ ならば V は既約である。

2. 上により、V が既約であれば $R \to V$ なる R 加群の全射がある（複数ありうる）。この核である左イデアル I は、R の左極大イデアルである。

3. R の任意の左極大イデアル I に対し、R/I は既約 R 加群である。

例 4.2.5. K を体とし、$V = K^n$ を縦ベクトル空間とする。$R := M_n(K)$ とする。V は左 R 加群として既約である。なぜなら、任意の非零ベクトルが V を R 上生成するから。

これは、K を斜体としても（証明こみで）変わらない。

斜体の定義について復習しておくと、単位的環 R であって $R \setminus \{0\}$ が積について（非可換かもしれない）群になるものを斜体という。さらに可換環であるものを体という。

補題 4.2.6. (Schur の補題) V を既約 R 加群, W を R 加群とする。

1. R 加群準同形 $V \to W$ は単射または 0 である。
2. R 加群準同形 $W \to V$ は全射または 0 である。
3. W も既約とするとき R 加群準同形 $V \to W$ は 0 または全単射 (すなわち同形) である。
4. $\mathrm{End}_R(V)$ は斜体である。

証明は、V に自明な部分加群がないことから kernel, image を考えれば容易に証明される。最後の項目に、$V \neq \{0\}$ を使っている。

$\mathbb{Q} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})$ により、最後の項目の逆は一般には不成立。

定理 4.2.7. (Schur の補題) K を代数閉体、R を K 代数、V を既約 R 加群で K 上の線形空間として有限次元とする。このとき、自然な写像 $K \to \mathrm{End}_R(V)$ は同形である。

証明. K の像は R の中心に入っているので、R 加群の定義により存在する $R \to \mathrm{End}(V)$ から制限により $f : K \to \mathrm{End}_R(V)$ なる単位環準同形が得られる。$V \neq \{0\}$ により $\mathrm{End}_R(V)$ において $1 \neq 0$。K は体だから f は単射。これにより $K \subset \mathrm{End}_R(V)$ と見る。

$\mathrm{End}_R(V) \subset \mathrm{End}_K(V)$ は K 上有限次元である。従って、その元 x は K 上代数的 $(1, x, x^2, \ldots$ が K 上一次従属になるから)。

故に $x \in K$。これは $K = \mathrm{End}_R(V)$ を意味する。 □

系 4.2.8. G を可換群 (モノイドでも良い) とし、K を代数閉体とする。G の有限次元 K 線形既約表現 V は全て 1 次元、すなわち準同形 $G \to (K, \cdot)$ から引き起こされる。

証明. 可換性より、$K[G]$ の V への作用は $K[G]$ 加群準同形。よって $K[G] \to \mathrm{End}_{K[G]}(V)$ を factor するが、この式の右辺は K である。 □

4.3 Artin 性、組成列

定義 4.3.1. (Artin 加群) R を環とする。V を R 加群とする。V の部分 R 加群の列

$$V \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$$

を下降列 (descending series)、

$$0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n \subset \cdots \subset V$$

を上昇列という。任意の上昇列があるところから停滞するとき V を Noether 加群といった。任意の下降列があるところから停滞するとき V を Artin 加群という。

約束により、全て左 R 加群として考えている。明示したいときには左 Artin 加群という。

注意 4.3.2. Artin 加群であることと、「任意の空でない部分 R 加群の集合に、包含関係に関する極小元がある」こととは同値。理由は Noether 加群のところで述べたものと同じ。

定義 4.3.3. （組成列）V の部分 R 加群の列

$$V = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = \{0\}$$

が組成列であるとは、M_i/M_{i+1} が既約 R 加群であること。n を組成列の長さという。

長さが無限のものは、ここでは組成列とは言わないことにする。

例 4.3.4. $R = K$ を体とし、V が体 K 上の有限次元線形空間のとき、V は組成列を持ち、その長さは次元に一致する。

定理 4.3.5. (Jordan-Hölder の定理) R 加群 V が二つの組成列

$$V = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_s = \{0\}$$

$$V = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_t = \{0\}$$

を持ったとすると、$s = t$ で、かつ既約 R 加群の集合 M_{i-1}/M_i $(i = 1, \ldots, s)$ と N_{i-1}/N_i $(i = 1, \ldots, s)$ は順番を入れ替えてそれぞれ同型とできる。

証明. 組成列の長さに関する帰納法を用いる。長さ 0 のときには自明。V が長さ $s-1$ 以下の組成列を持つときには定理が成立すると仮定して、s の組成列を持つときに定理を示す。

自然な写像 $N_1 \to M_0/M_1$ を考えると、既約性より全射か 0 である。0 であるならば、$N_1 \subset M_1$ となる。$N_1 \subsetneq M_1$ となると N_0/N_1 の既約性に違反するから $N_1 = M_1$。これは長さ $s-1$ 以下の組成列を持つから帰納法の仮定を使って定理は示される。

よって、$N_1 \to M_0/M_1$ が全射であるとしてよい。この核は $L := N_1 \cap M_1$ である。対称性より $M_0/M_1 \cong N_1/L$, $N_0/N_1 \cong M_1/L$ となる。ここで、M_1 について帰納法の仮定を使う。$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$ は M_1 の組成列である。$M_1 \supset L \supset (M_2 \cap L) \supset (M_3 \cap L) \supset \cdots$ を考えると、$M_i \cap L \to M_i/M_{i+1}$ の核は $M_{i+1} \cap L$ だから $(M_i \cap L)/(M_{i+1} \cap L)$ は M_i/M_{i+1} に単射し、従って 0 または同型である。ここから、$M_1 \supset L \supset \cdots$ なる組成列が存在することがわかる。M_1 に帰納法の仮定を用いて、L の組成列は長さ $s-2$ で、その商に現れる既約加群の同形類は（重複度も込めて）M_1 の組成列に現れる既約加群のうち $M_1/L \cong N_0/N_1$ を一つ減らしたものとなる。

N_1 にも同じ議論を用いてやると、$L \subset N_1$ の組成列に現れる既約加群の同形類は、N_1 の組成列に現れる既約加群から $N_1/L \cong M_0/M_1$ を一つ減らしたものとなる。こうして、$M_0, M_1, \ldots$ なる組成列に現れる既約加群の同形類は、L のそれに M_0/M_1, $M_1/L \cong N_0/N_1$ を補ったものに等しい。一方、$N_0, N_1, \ldots$ なる組成列にあらわれる既約加群の同形類は、L のそれに $N_0/N_1, N_1/L \cong M_0/M_1$ を補ったものに等しい。従って、V の二つの組成列に現れる既約加群の同形類の集合はは重複度も込めて等しい。 □

定義 4.3.6. 組成列を持つ R 加群 V を R 上の**長さ有限**加群といい、その組成列の長さを V の長さといい、$l(V)$ であらわす。

命題 4.3.7. V が長さ有限なら、その部分加群 M も商 V/M も長さ有限。逆に、M と V/M が長さ有限ならば V は長さ有限。このとき

$$l(V) = l(M) + l(V/M)$$

が成立する。

証明. V の組成列と M の共通部分をとることで M の組成列を得られることは、上の証明で見た。V/M での V の組成列の像を見ることで V/M の組成列が得られることも易しい。命題の前半が言えた。

M の組成列と V/M の組成列をつなげて V の組成列が得られるから、後半が言える。

組成列の長さの一意性より、等式を得る。 □

この命題により、V が長さ有限なとき、その部分加群の狭義単調減少有限列を任意に与えられたとき、それを含む組成列がとれることがわかる。

命題 4.3.8. V が組成列を持つ必要十分条件は、Noether かつ Artin であること。

証明. 十分性：$V \supset 0$ が 0 のときは、長さ 0 の組成列を持つ（ということにする）。V が既約なら長さ 1 の組成列を持つ。今、V が組成列を持たないとする。$U_0 := V$, $L_0 := \{0\}$ とおく。以下の手順で、減少列 $U_0 \supsetneq U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq \cdots$ 増大列 $L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \cdots$ がとれて、どちらかは無限列になり、Artin 性または Noether 性に違反して証明が終わる。さて、組成列を持たないから V は既約でも 0 でもない。よって $V \supsetneq V' \neq 0$ がとれる。今、V/V' と V' の両方が組成列を持つならば、それらから V の組成列が作れる。したがって、どちらかは組成列を持たない。V/V' が組成列を持たないときは $L_1 := V'$ とおき、V' が組成列を持たないときには $U_1 := V'$ とおく。V/V' が組成列を持たないときには $U_0 = V \supsetneq V'' \supsetneq V' := L_1$ なる V'' がとれる。上と同様にして、V'' を U_1 または L_2 にとる。どちらにするかは、U_*/L_* に組成列が無いように名前を付けていく。

このようにして、減少列と増大列がとれる。どちらかは無限列となるから、Artin 性または Noether 性に反する。

必要性：V の長さを n とする。単調増大部分列の長さは n を超えないことを上の命題でみた。従って Artin かつ Noether である。 □

次の定理は、同じ方法で証明されて同じ名前がついているが有限群に関する定理である。

定理 4.3.9. (Jordan-Hölder の定理)

G を有限群とする。正規部分群の列

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_s = \{1\}$$

が組成列であるとは、G_{i-1}/G_i が単純群であること。

任意の有限群は組成列を有し、その商に現れる単純群の同形類の集合は重複度を込めて組成列の取り方によらない。特に、長さもよらない。

4.4 根基と中山の補題

定義 4.4.1. R を環とする。R の Jacobson 根基 (Jacobson radical) $\mathrm{rad}(R)$ は次で定義される。

$$\mathrm{rad}(R) := \cap_m m$$

ここに、m は R の左極大イデアル m を全て動く。

補題 4.4.2. (中山の補題) M を有限生成 R 加群、N をその部分加群とする。$M = N + \mathrm{rad}(R)M$ ならば $M = N$ である。

証明にはちょっと準備がいる（後述）。
次の形で良く使われる。

系 4.4.3. R を可換な局所環 (すなわち、ただ一つの極大イデアル m を有する環) とし、M を有限生成 R 加群とする。M の部分集合 S が R 加群としての生成元となる必要十分条件は、その M/mM での像が R/m 加群として生成元となることである。

証明. $N :=< S >$ に中山の補題を使えばよい。$M =< S > +mM$ と最後の条件は同値である。 □

定義 4.4.4. $x \in M$ を R 加群とその元とする。

$$\mathrm{Ann}(x) := \mathrm{Ker}(R \to R \bullet x) \quad (R \bullet x \subset M)$$

は左イデアル、

$$\mathrm{Ann}(M) := \cap_{x \in M} \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ker}(R \to \mathrm{End}_+(M))$$

は両側イデアルである。

命題 4.4.5. M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ で既約 R 加群の同形類の代表系を表す。このとき

$$\mathrm{rad}(R) = \cap_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ann}(M_\lambda)$$

特にこれは両側イデアルとなる。

証明. 右辺を J と置く。任意の左極大イデアル m に対して R/m は既約 R 加群。そこでの 1 の像を $\bar{1}$ と書くと $m = \mathrm{Ann}(\bar{1}) \supset \mathrm{Ann}(R/m) \supset J$ により $\mathrm{rad}(R) \supset J$。

逆に、任意の既約 R 加群 M に対して $\mathrm{Ann}(M) = \cap_{0 \neq x \in M} \mathrm{Ann}(x)$ となるが、各 $\mathrm{Ann}(x)$ は既約 R 加群への非零準同型 $R \to R \bullet x = M$ の核だから左極大イデアルとなる。こうして $\mathrm{Ann}(M) \supset \mathrm{rad}(R)$、$J \supset \mathrm{rad}(R)$. □

証明. 中山の補題の証明。中山の補題の設定を仮定する。$N \subsetneq M$ としてよい。M が有限生成 R 加群とすると、「M の真部分 R 加群で N を含むものたち」には極大なもの M' がある。(M の N を含む真部分 R 加群の集合が包含関係により帰納的であることを示せば Zorn の補題より従う。N があるから空ではない。いま、全順序関係にある真部分加群の族 F を考える。その合併は M とはならない。M となるなら、$x_1, \ldots, x_n$ を M の生成元としたとき、それぞれを含む部分加群が F に属すので、それら有限個の部分加群のうちで最大の加群 $\in F$ がすでに M となってしまい矛盾。）

M/M' は既約である。上の命題 $\mathrm{rad}(R) = J$ により $\mathrm{rad}(R)(M/M') = 0$、すなわち $\mathrm{rad}(R)M \subset M'$。中山の補題の仮定から $N + \mathrm{rad}(R)M = M$ だが、左辺が M' に入ってしまうのでこれは矛盾。 □

4.5　Wedderburn の定理（半単純環の構造定理)

補題 4.5.1. M を R 加群、N を部分 R 加群、M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を既約な M の部分 R 加群の族とする。

$$L = N + \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

とすると、適当な部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して

$$L = N + \sum_{\lambda \in \Lambda'} M_\lambda$$

が直和となるようにできる。

証明. 右辺が直和になるような Λ' の集合を F とすると、包含関係に関して帰納的順序集合となる。F は空集合を含むので空ではない。極大元をとり Λ' とする。右辺が L に到達していることを示すのはルーチンワークである。 □

系 4.5.2. 1. M が半単純であるなら、その部分 R 加群も半単純。

2. M が半単純 R 加群であることと、既約部分 R 加群の和で書けることとは同値。

3. M が半単純なら、その商 R 加群も半単純。

証明. 1. M が半単純とは、任意の部分 R 加群が直和因子となることであった。$C \subset A \subset M$ を部分 R 加群とする。A において C が直和因子になっていることを示せばよい。$M = C \oplus D$ となる D がある。このとき、

$$A = C \oplus (A \cap D)$$

となることを示せばよい。右辺が直和であることは自明。左辺が右辺を含むことも自明。左辺の元 $a \in A$ をとってくると、$a = c + d, c \in C, d \in D$ と書ける。$c \in C$ から、$d = a - c \in A \cap D$ より等号が成立。

2. M が半単純とする。M の部分既約 R 加群全ての和を M' とすると、半単純性から $M = M' \oplus C$。ここで $C \neq 0$ ならば $0 \neq x \in C$ をとって部分 R 加群 $R \bullet x \subset C$ は $R/\mathrm{Ann}(x)$ と同型であり、R の $\mathrm{Ann}(x)$ を含む左極大イデアルの存在性から $R \bullet x$ には極大部分 R 加群 L がある。$V := R \bullet x/L$ は既約 R 加群となり、$R \bullet x$ は（1 により）半単純なので V と同型な直和因子をもつ。$V \subset C$ は M' と直和である。これは M' の構成に違反する（V も足してあるはず)。

逆に、M が既約加群の和としてかけているとする。M の任意の部分 R 加群 N と、全ての既約部分 R 加群 M_λ、$L = M$ に対して上の補題を使えば N が直和因子であることがわかる。

3. 2 から従う。 □

定義 4.5.3. 環 R が半単純環であるとは、R が左 R 加群として半単純（すなわち完全可約）であること。

命題 4.5.4. R が半単純ならば、任意の R 加群は半単純。また、射影的。

証明. 系 4.5.2 を使う。R が半単純ならば、その直和である自由 R 加群も半単純。任意の R 加群は自由 R 加群 F の商であるから半単純である。

また、F が半単純なのでその商は直和因子となり、従って射影的。 □

定義 4.5.5. 環 R が単純環とは、両側イデアルが 0 か全体しかないもの。

定理 4.5.6. 環 R について次は同値。

1. R は半単純。

2. R は左 Artin 環で、$\mathrm{rad}(R) = 0$。

3. R は左 Artin 環で、有限個の単純環の直積に同型。

4. R は斜体 $D_1, \ldots, D_r$ により直積環

$$M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$$

に同型。

証明. $1 \Rightarrow 4$. R は既約 R 部分加群 M_λ の直和となる。$1 \in R$ を直和にあらわして $1 = \oplus_{\lambda \in \Lambda} 1_\lambda$ と有限和に書ける。$1_\lambda = 0$ となるような λ があるとすると、任意の $m_\lambda \in M_\lambda$ に対して $m_\lambda = m_\lambda 1$ の M_λ 成分を考えることにより $m_\lambda = 0$。したがって、Λ は有限集合。各既約因子を同型ごとにまとめて $R \cong I_1^{n_1} \oplus \cdots I_r^{n_r}$ を得る。Schur の補題により $\mathrm{Hom}_R(I_i, I_j)$ は $i = j$ のときに斜体 D_i と同形となり、そうでないときは 0。従って

$$\mathrm{End}_R(R) = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$$

となる。ここで、環として

$$\mathrm{End}_R(R) \cong R^{op}, f \mapsto f(1),$$

ここに R^{op} は R と同じ台集合に、積の順序を逆にして得られる環（逆同型環という）を表す。これにより R^{op} が行列の直積となったが、行列環の逆同型環は自分自身と同形 (転置写像がこの同型を与える。)

$4 \Rightarrow 3$: $M_n(D)$ が単純環であることは行列計算で容易に確認できる。これは有限次元 D 線形空間なので Artin 環である。直積も Artin 環。

$3 \Rightarrow 2$: 単純環の Jacobson 根基は 0。直積環の Jacobson 根基は各成分の Jacobson 根基の直積。

$2 \Rightarrow 1$: R の左極大イデアル I 全ての共通部分 $\mathrm{rad}(R)$ が 0 である。従って任意の $0 \neq x \in R$ に対して $x \notin I$ なる極大イデアルがとれる。従って、任意の 0 でないイデアル J に対し、$I \cap J \subset J$ が真に J より小さくなるような極大イデアル I がとれる。Artin 環であるから、極大イデアル I_1 から始めてこの操作を繰り返すと $I_1 \supset I_1 \cap I_2 \supset I_1 \cap I_2 \cap I_3 \supset \cdots \supset I_1 \cap \cdots \cap I_n = 0$ を得る。作り方から $I_1 \cap \cdots \cap I_{m-1} \subset I_m$ とはなっておらず、I_m の極大性から $(I_1 \cap \cdots \cap I_{m-1}) + I_m = R$ が成立する。特に $c + d = 1,\ c \in I_1 \cap \cdots \cap I_{m-1},\ d \in I_m$ がとれる。このことから $R \to R/(I_1 \cap \cdots \cap I_{m-1}) \times R/I_m$ は全射である。（中国式剰余定理である。右辺の元 $a \oplus b$ に対し $\tilde{a}d + \tilde{b}c \in R$ をとればよい。）

帰納法により

$$R \to R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$$

は全射で、核は $\cap I_i = 0$ だから同型である。右辺は既約 R 加群の直和なので R は半単純加群、従って半単純環となる。 □