# 代数学 II(2003 年度後期,2 月 4 日実施）期末試験問題（松本 眞）

注：途中の計算を**絶対に**消さないこと。途中の計算がないものは**採点できません。**答案用紙が足りない人は、遠慮なく追加の答案用紙を請求してください。

**問題１.**

(1) 群の定義を述べよ。
(2) 可換ではない群の例をひとつ挙げよ。（群であることの証明はしなくて良い。）
(3) モノイドからモノイドへの写像で、半群の準同型だがモノイドの準同型ではない例を一つ挙げ、理由を簡単に説明せよ。

**問題２.** 複素数の絶対値をとる写像

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z|$$

を考える。次の各問に答えよ。

(1) $f$ は、群 $(\mathbb{C}, +, 0)$ から群 $(\mathbb{R}, +, 0)$ への群準同型であると言えるか。理由つきで述べよ。(これらが群であることは示さなくて良い。)
(2) $f$ は、モノイド $(\mathbb{C}, \times, 1)$ からモノイド $(\mathbb{R}, \times, 1)$ へのモノイド準同型であると言えるか。理由つきで述べよ。(これらがモノイドであることは示さなくて良い。)
(3) $f$ を制限して、

$$g : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times, \quad z \mapsto |z|$$

を考える。ここに、$\mathbb{C}^\times$ は 0 以外の複素数の集合、$\mathbb{R}^\times$ は 0 以外の実数の集合である。
　$g$ が群準同型であることを示せ。ただし、$\mathbb{C}^\times, \mathbb{R}^\times$ の群としての二項演算は積で与えられるものとし、これらが群になることは示さなくてよい。
(4) $g$ の核 (Kernel) を求めよ。
(5) 絶対値が 1 である複素数の集合を $T$ であらわす。$T$ が $\mathbb{C}^\times$ の部分群であることを示せ。
(6) $g$ に関する群準同型定理を記述することで、$\mathbb{C}^\times$ の $T$ による商群と同型になる群を求めよ。

**問題３.** (Fermat の小定理)
群 $((\mathbb{Z}/n)^\times, \times, 1)$ の位数を $\varphi(n)$ であらわす。$a \in \mathbb{Z}$ が $n$ と互いに素な整数なら

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

となることを示せ。

**問題４.** $G$ を位数が素数の群とする。$G$ の部分群を全て求めよ。

**問題５.** $\mathbb{R}$ を実数体とし、$GL_n(\mathbb{R})$ で実係数の $n$ 次正則行列が積に関してなす群をあらわす。$SL_n(\mathbb{R})$ で行列式が 1 であるような行列がなす $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群をあらわす。

$$G := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \det(A) = \pm 1\}$$

とする。

(1) $G$ が $GL_n(\mathbb{R})$ の正規部分群になることを示せ。
(2) $G/SL_n(\mathbb{R}) \cong \{1, -1\}$ を示せ。
(3) $GL_n(\mathbb{R})/G \cong \mathbb{R}_{>0}$ を示せ。

ここに、$\{1, -1\}$ は積により群とみなし、$\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数の集合であり積により群とみなす。

**問題６.** 授業への感想、要望などを自由に述べよ。