

代数学 B(2007 年度後期, 12 月 18 日実施予定) 中間試験ヒント問題 (松本 眞)

注: 途中の計算を絶対に消さないこと。途中の計算がないものは採点できません。答案用紙が足りない人は、裏を使うことを断った上で、裏に書いてください。

問題 1. 3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ (訂正あり) を用いて、次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha = \cos 20^\circ$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式 φ を求めよ。
- (2) $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]$ を求めよ。
- (3) n を平方数でない自然数とする。 $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}[\alpha]$ を示せ。
- (4) $\beta = \cos 100^\circ$ は φ の根であることを示せ。
- (5) φ の上記以外の根 γ を求めよ。
- (6) $\beta, \gamma \in \mathbb{Q}[\alpha]$ を示せ。
- (7) \mathbb{Q} 上の φ の最小分解体を求めよ。
- (8) \mathbb{Q} 上の同型写像 $\sigma : \mathbb{Q}[\alpha] \rightarrow \mathbb{Q}[\alpha]$ はいくつあるか?

問題 2. 次のようなものの例を挙げよ。もし、そのような例がありえないなら、証明を添えてその理由を述べよ。

- A: $F \subset K$ は体の拡大だが、代数拡大体ではない
- B: $F \subset K$ は体の代数拡大だが、有限次拡大ではない
- C: $F \subset K, K \subset L$ が代数拡大だが、 $F \subset L$ は代数拡大でない
- D: $F \subset K$ は三次拡大だが、 $K \subset L$ で $F \subset L$ は 2 のべき乗次拡大である
- E: $F \subset K$ は有限次拡大だが、代数拡大ではない

問題 3. 授業などへの感想、要望を述べよ。