数理科学 II：微分方程式講義メモ（2010 年度：松本　眞）

1　微分方程式とその意味

例 1.1. $f(t)' = 0$, $\frac{df(t)}{dt} = 0$ は立派な微分方程式

解：f は定数関数：$f(t) = C$
たいてい、微分方程式の解には「定数」の自由度が現れる。

例 1.2. $f'(t) = f(t)$

解法：$f'(t)/f(t) = 1$, $\log(|f(t)|)' = 1$, $\log(|f(t)|) = t + C$, $|f(t)| = e^{t+C} = C_1e^t$ $(C_1 := e^C)$, 解答：$f(t) = Ce^t$ (C が正負を取りうるゆえ、絶対値は外れる）
厳密に考えると

- $f(t) = 0$ となる点ではどうするのか？$\Rightarrow$ ちゃんと考えてない。

  そこで、$f(t) \equiv 0$（0 関数）は解である。それ以外の解とすると、解は $f(t_0) = c \neq 0$ となる点 t_0 を含む。f は可微分ゆえ連続、そこで t_0 の近傍で $1/f(t)$ は存在して、上の議論でその近傍での解が求まる。そうすると、$\mathbb{R}$ 上で解はこの形に決まってしまう（初期値を決めたときの解の一意性：後述)。

記法：同じ方程式を
$$\frac{dx}{dt} = x$$
などと書くが、一層厳密でなくなる。そのかわり、広い意味で捉えられる（後述)。

今回は、上のような記法は（狭い意味で解釈することで）暗黙のうちに「x は t の関数 $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であり、微分可能である」ということを仮定するものとする。

常微分方程式とは、「偏微分があらわれない、すなわち一変数関数（値はベクトル値かもしれないが、変数が一個）の微分に関する方程式」のこと。偏微分があらわれるのを偏微分方程式と言い、常微分方程式と区別する。

例 1.3. （常微分方程式の例）
指数成長 (exponential growth), 指数減少 (exponential decay)：
差分方程式の極限としての微分方程式の導出
単位時間あたりの、物質量（生物個体数）１単位あたりの増分が定数 a （Isaac Newton が微積分学確立当時に Principia でこんな議論をしている）：

$$\begin{aligned}
&x(t+1) - x(t) \approx ax(t) \\
&x(t+\Delta t) - x(t) \approx a\Delta t x(t) \\
&\tfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \approx ax(t) \\
&x'(t) = ax(t)
\end{aligned}$$

コメント：方程式に, $t+1$ などが現れないことに注意（過去や未来からの影響はない、現在の x の変化率 x', x, t のみの間の方程式：哲学的には、時間を飛び越えた影響はない：未来は無限に近い直前のみで決定されるのが自然界)。実際差分がはいると大変解きにくい。

教科書例４。このような、『実例』について、思考により微分方程式などによる数学的記述を行うことを「数理モデルを立てる」という。実に重要な数学の応用である（現実の事象を数学により記述するのである)。これにより、たとえば「初速が十分なら、打ち上げられたロケットは（あとで加速しなくても）永久に戻ってこない」という「惑星探査船が可能である」ことが 1687 年に証明が発表された（Newton の Principia の序文)。

教科書の演繹は説明不足の感あり。

- やわらかい糸が静止しているとき、各点での張力（とは何ぞ？＝そこを釘でとめて、片側をちょん切っても安定させるために必要な力）は糸の曲線の接線方向で逆向きに引っ張り合っている（運動する質量のある糸だとそうはならない）

- 力のベクトルは分解できる：水平方向には重力がないから張力の水平方向は一定、垂直方向は（くぎを使った思考実験により）点 P_0 を釘で止めてやると P にかかる垂直成分の力が P_oP 分の質量にかかる重力とわかる

- が、これはまだ厳密な数学的観察ではない。