数理科学 II：微分方程式講義メモ 2（2010 年 4 月 14 日：松本　眞）

三つの基本的定理

定理 0.1. （微積分学の基本定理）$f(t)$ を閉区間 $[a,b]$ 上連続な実数値関数とする。つまり $f \in C^0([a,b])$。

1. 不定積分 $f \mapsto F(x) : \int_a^x f(t)dt$ は $C^0([a,b])$ から $C^1([a,b])$ への写像 I を与える。
2. 微分 $G(t) \mapsto G'(t)$ は $C^1([a,b])$ から $C^0[a,b]$ への写像 D を与える。
3. $D \circ I(f) = f$
4. $I \circ D(G) = G + C$, ここに C はある実定数。

証明は、「解析入門 I（杉浦光夫著）」定理 5.4 を参照。

定理 0.2. （陰関数定理、自由度 1 の場合）$f(x_1, \ldots, x_n, y)$ が $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合 U で定義された実数値 C^1 級関数とする。点 $(a_1, \ldots, a_n, b)$ において $f = 0$ となるとする。このとき、この点の近傍において、方程式 $f = 0$ を解いて $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ の形にしたい。そのためには、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \ldots, a_n, b) \neq 0$$

となれば十分である。より厳密にいえば、この条件のもと次が成り立つ。

1. $(a_1, \ldots, a_n)$ の開近傍 $V \subset \mathbb{R}^n$, b の開近傍 $W \subset \mathbb{R}$ であって、$V \times W \subset U$ となるものがとれて、ある連続関数 $g : V \to W$ が所望の解を与える、すなわち
   (a) $g(a_1, \ldots, a_n) = b$（この点を通っていますよ）
   (b) $f(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ が V 上成立（解ですよ）
   (c) $V \times W$ では、(a) の g の条件を満たす y が $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ ならば $y = g(x_1, \ldots, x_n)$（解はただ一つユニークですよ）
2. f が C^r 級 $(r \leq 1)$ なら g も C^r 級。

証明は、「解析入門 II（杉浦光夫著）」定理 1.1 などを参照。

定理 0.3. （微分方程式の解の存在と一意性）

$f(t, x_1, \ldots, x_n)$ を「（t_0 中心の閉区間）×（$(a_1, \ldots, a_n)$ を中心とする閉球）」で定義された n 次元**連続**実ベクトル値関数とする。$x := (x_1, \ldots, x_n)$ と書く。このとき、$(t_0, a_1, \ldots, a_n)$ の近傍で、この点を初期値として与えられた（連立）常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = (a_1, \ldots, a_n)$$

をこの近傍で解くことができる十分条件として、リプシッツ条件がある。すなわち、ある定数 L が存在して上の近傍（の直積）で

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y||$$

を満たすとする。このとき、ある $\delta > 0$ がとれて $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上で定義された（局所）解 $y(t)$ が一意に定まる。すなわち、

1. $\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$ が $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で成立 (解ですよ)
2. $y(t_0) = (a_1, \ldots, a_n)$(初期値条件満たしてますよ)
3. 上の二つを満たす y は $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上でただ一通りにさだまる。

さらに、δ は次のようにとれる。

$$\delta = \min\{r, R/M\},$$

ここに r は「t_0 中心の閉区間」の半径、R は「$(a_1, \ldots, a_n)$ 中心の閉球」の半径、M はこの直積上での $|f|$ の最大値。

証明は「常微分方程式入門（高橋陽一郎著）基礎数学 6 東京大学出版会」定理 IV.A.1 を参照。