数理科学 II：微分方程式講義メモ 3（2010 年 4 月 28 日：松本　眞）

おわびと訂正

メモ 2 の定理 0.3 に「f が連続」の仮定が抜けていた。

定理 0.3.（微分方程式の解の存在と一意性）$f(t, x_1, \ldots, x_n)$ を「（t_0 中心の閉区間）×（($a_1, \ldots, a_n$) を中心とする閉球)」で定義された n 次元**連続**実ベクトル値関数とする。$x := (x_1, \ldots, x_n)$ と書く。このとき、$(t_0, a_1, \ldots, a_n)$ の近傍で、この点を初期値として与えられた（連立）常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = (a_1, \ldots, a_n)$$

をこの近傍で解くことができる十分条件として、リプシッツ条件がある。すなわち、ある定数 L が存在して上の近傍（の直積）で

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y||$$

を満たすとする。このとき、ある $\delta > 0$ がとれて $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上で定義された（局所）解 $y(t)$ が一意に定まる。すなわち、

1. $\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$ が $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で成立 (解ですよ)
2. $y(t_0) = (a_1, \ldots, a_n)$(初期値条件満たしてますよ)
3. 上の二つを満たす y は $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上でただ一通りにさだまる。

さらに、δ は次のようにとれる。

$$\delta = \min\{r, R/M\},$$

ここに r は「t_0 中心の閉区間」の半径、R は「$(a_1, \ldots, a_n)$ 中心の閉球」の半径、M はこの直積上での $|f|$ の最大値。

証明は「常微分方程式入門（高橋陽一郎著）基礎数学 6 東京大学出版会」定理 IV.A.1 を参照。

P.17 の

$$\frac{dy}{dx} = |y|^{1/2}$$

の解について、左の放物線の上下を逆にしてしまった。訂正後は次のとおり。$a > b$ として

$$y(x) = \begin{cases} -(x-b)^2/4 & (x \leq b) \\ 0 & (b \leq x \leq a) \\ (x-a)^2/4 & (b \leq x \leq a). \end{cases}$$

このように、リプシッツ条件が成立しない場合には、(1) 初期値を決めても解が一意に定まらない：いつでも天国へ向けて旅立てる (2) 地獄から地上へきて地上に「すきなだけ」滞在し、天国へ旅立てる：本質的な任意定数が 2 個あり、「一階の微分方程式の解が一個を超えた定数を持つ」ことがある。ので、一般解の定義もままならない。

教科書の「正規形」の定義の補足：

$\mathbb{R}^{n+1}$ のある開集合 U 上で定義されている n 次元連続ベクトル値関数 $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n$ が与えられたとする。

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

の形に書かれている微分方程式を、U 上の（n 次元ベクトル値）1 階正規形常微分方程式と言う。ここに $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ は n 次元ベクトル値の未知関数で、それがこの微分方程式をみたすとき、$\mathbf{y}(t)$ を解と言う。

P.22 図 1.3　実は、上の例と同様に、上から下りてきて接点から直線を進み、しかるのちに上にあがっていくという解もありうることに注意しておこう。これもまた、$y = x - 1/4$ でリプシッツ条件がなりたっていないのが曲者たる理由である。