数理科学 II：微分方程式講義メモ 5（2010 年 5 月 19 日：松本　眞）

2.3 一階線形微分方程式

$D : y(x) \mapsto y'(x)$ (微分作用素)
$L_F(x) : y(x) \mapsto F(x)y(x)$ (掛け算作用素)

$$(D \circ L_F)(f) = D(Ff) = F'f + Ff' = L_{F'}(f) + L_F \circ D(f)$$

そこで $F(x)$ を

$$F'(x) = F(x)P(x)$$

なる微分方程式の解とすれば

$$\text{右辺} = L_F(L_P(f) + D(f))$$

すなわち

$$(L_F)^{-1} \circ D \circ L_F = D + L_P$$

したがって、線形一階非同次微分方程式

$$(D + L_P)y(x) = Q(x)$$

の解は

$$y(x) = (D + L_P)^{-1}Q(x) = L_F^{-1} \circ D^{-1} L_F(Q(x))$$

すなわち

$$y(x) = F(x)^{-1}(\int (F(x)Q(x))dx + C)$$

で与えられる (C は任意定数)。ここで、$F(x)$ が満たす微分方程式は変数分離形で解けて一つは

$$F(x) = e^{\int P(x)dx}$$

これを代入して

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}(\int (e^{\int P(x)dx} F(x)Q(x))dx + C).$$

定数変化法：非同次線形微分方程式の解法。非同次項を除いて同次線形微分方程式部分のみ切り離して解く。その解法にあらわれる不定積分の積分定数を、関数とおいて非同次線形微分方程式をとく。

・**線形に帰着される非線形微分方程式の例**
ベルヌーイの微分方程式

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m.$$

$y'y^{-m} + P(x)y^{1-m} = Q(x)$ と変形すると、初項の積分から $z = y^{1-m}$ と置きたくなる。すると $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (1-m)y^{-m}y'$

$$\frac{1}{1-m}z' + P(x)z = Q(x)$$

となり、$1-m$ を掛ければ一階線形に帰着。（$1-m$ の場合は、右辺を左辺に位項すると同時線形方程式。）
リッカチの微分方程式

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

一般に求積法では解けないが、一個解 $y_1(x) = \varphi(x)$ が見つかっていると、ほかの解 $y_2(x)$ は次のようにして求まる。$z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ とおいて z を微分すると、ベルヌーイ微分方程式を満たしているのでそれに帰着。

・**完全微分方程式** xy 平面の開領域 Ω で定義された 2 変数の全微分

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

という概念がある。「各点での、無限小移動に対する変化量が線形であるとして、その変化の勾配」を表している。
$\Phi(x,y)$ を Ω 上の可微分関数とすると、その全微分は

$$d\Phi(x,y) = (\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y))dx + (\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y))dy.$$

右辺の形をしている全微分を「完全微分」という。完全微分＝0 の形の微分方程式は完全微分方程式と呼ばれ、その一般解は

$$\Phi(x,y) = C$$

(C は定数) で与えられる。