数理科学 II：微分方程式講義メモ 5（2010 年 5 月 26 日：松本　眞）

## 2.4 完全微分方程式

$\Omega$ を $\mathbb{R}^2$ の連結かつ単連結な開集合とする。$\Omega$ 上の微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

を考える。

定理 2.8：上の全微分方程式が完全形であるための必要十分条件は、

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$$

$\Omega$ が単連結でないといけない。$\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。$\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ とおき、複素関数である

$$\Phi(x+yi) := \log(x+y\sqrt{-1}) \text{ の虚部}$$

なる多価関数を考える。複素関数を知らない人は、

$$\Phi(x,y) = \arctan(y/x)$$

すなわち、点 $(x,y)$ の偏角を求める関数であるとして差し支えない。このとき

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} =: P(x,y), \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} =: Q(x,y)$$

とおくならば、$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ が定理 2.8 の条件を満たすことは計算で容易に確かめられる。しかしながら、ここから定理 2.8 により存在するはずの $\Psi(x,y)$ なる関数は $d(\Phi - \Psi) = 0$ なる関係式より $\Phi$ に定数関数を足して得られる。しかるに、$\Phi$ は偏角で、原点を一周すると値の変わる「多価関数」である。

定理 2.8 の条件を満たす微分形式を閉形式という。「閉形式の線形空間」を「完全形式の線形空間」で割った商空間を $\Omega$ の１次 deRham cohomology 群という。この次元は、$\Omega$ の穴の数に一致する。

**解法** $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$ であるかどうかを確かめる。

運よくそうであれば、$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y)=P(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y)=Q(x,y)$ なる $\Phi$ が見つかる。($P(x,y)$ を $y$ を定数とみなして $x$ で積分し $\Phi(x,y)$ を得るが、$y$ のみに依存する不定「定数」$g(y)$ がある。これは $\frac{\partial}{\partial y}\Phi=Q(x,y)$ により定数を除いて決定する。解は、$\Phi(x,y)=C$ として陰に与えられる。

**積分因子**

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ が完全微分でなくても、ある関数 $\lambda(x,y)$ を掛けて完全形になれば、上記の議論に持ち込める。

$\lambda(x,y)$ を積分因子という。眼力で見つける。教科書 45-46 ページに、うまくいく場合の例がある。

**2.5 非正規形**自由変数と従属変数を取り替えて、正規形に直せる場合がある。$x,y,y'$ のどれを自由変数と思うかを自由に変える。どれかを自由変数と思えば、残りはそれとあとひとつ、およびその微分で書けることが多い：もともとは $x$ が自由変数で $y$ が従属、$y'$ がその微分。

$x$ は自由変数のままだが $y'$ を従属変数と思えば、$y$ を $x$ で微分することで $x$ と $y'$ の式にできることがある：(1) の場合。

$y$ を自由変数にとりなおして $y'$ を従属変数とみる場合、$x$ を $y$ で微分することで $1/y'$ となり $x$ が消去されて $p=y'$ と $y$ の正規形微分方程式となることがある：(2) の場合。

- $y=F(x,y')$ の形のとき：$y'=p$ とおいて $y$ が消去できる ($x$ で微分する)。

- $x=F(y,y')$ の形のとき：$y'=p$ とおいて $x$ が消去できる ($y$ で微分する)。

- $F(y,y')=0$ の形のとき：$F(y,p)=0$ がパラメータによる解 $y=q(s),p=p(s)$ を持っている場合：$y'=\frac{dy}{dx}=p(s)=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx}$ より

  $$p(s)=\frac{dq(s)}{ds}\frac{ds}{dx}$$

  これは変数分離形なので $x=x(s)$ が積分表示され、$y=q(s)$ と合わせて解のパラメータ表示を得る。