平成１７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専攻	専門科目(午前)

受験番号	M

平成１６年　8月　２５日　　　　９：００　～　１２：００

注　意　事　項

１. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙（表紙を含む.）	４　枚
解答用紙	３　枚
下書用紙	１　枚

２. 問題は全部で　３　問ある.

３. 解答は問題毎に必ず一枚ずつ別々の用紙を用い，それぞれの解答用紙に受験番号を記入し解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

４. 試験問題の表紙，解答用紙及び下書用紙の全てに受験番号を記入せよ.

５. 試験終了時には，全ての用紙を提出すること.

平成１７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] M を n 次の複素正方行列の全体とし，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の線形空間と考える．$A \in M$ に対して，I_n, A, $A^2, \cdots, A^n$ で生成される M の部分空間を $V(A)$ で表す．ただし I_n は n 次の単位行列.

(1) $\alpha \neq \beta$ とする.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

について，$\dim V(A_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(2) P を n 次の正則行列とする．このとき $\dim V(A) = \dim V(P^{-1}AP)$ となることを示せ.

(3) $n = 2$ のとき， $\dim V(A) = 2$ となるための必要十分条件を求めよ.

(4) $n = 3$ のとき， $\dim V(A) = 2$ となる A の例を一つあげて，その理由を述べよ.

(5) 一般の n に対し， $\dim V(A) \leq n$ となることを示せ.

平成１７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[2] $\phi(x)$ は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 上の連続関数であって，条件

$$\phi(x) > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \quad \lim_{|x| \to \infty} \phi(x) = 0$$

をみたす．この時，次の問いに答えよ．

(1) $\lim_{|x| \to \infty} \phi(x) = 0$ であることの定義を $\varepsilon - \delta$ 論法に従って述べよ．

(2) $p \geq 1$ とする．この時，ある $K > 0$ が存在して，$|x| > K$ なる任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\phi(x)^p \leq \phi(x) \leq 1$$

となることを示せ．

(3) $p \geq 1$ とし，条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx < \infty$$

を仮定する．この時

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)^p dx < \infty$$

を示せ．

(4) $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の有界な一様連続関数とする．また

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx < \infty$$

を仮定する．

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y) f(y) dy$$

とおくとき，$g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の有界な連続関数であることを示せ．

平成１７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[3] 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ について，$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2}}$$

により定義する．

(1) 任意の実数 x, y について，$d(x,y) \leq 1$ が成り立つことを示せ．

(2) x の ε-近傍 $B(x\,;\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \ :\ d(x,y) < \varepsilon\}$ について，$B(\sqrt{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{2})$ を図示せよ．

(3) d が距離の公理を満たすことを示せ．また，$d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$ が成り立つための必要十分条件を求めよ．

(4) $x_n = n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が，コーシー列になることを示せ．

(5) $d'(x,y) = |x-y|$ を距離とする距離空間 $(\mathbb{R}, d')$ について，$f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d')$, $f(x) = x$ が同相写像になることを示せ．