平成２２年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[1] 次の問に答えよ．

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．

(a) 行列 $A\,{}^t\!A$ を計算せよ．ここで ${}^t\!A$ は A の転置行列である．

(b) $B = A\,{}^t\!A$ とおくとき，行列 B の固有値を求めよ．

(c) 行列 B を直交行列により対角化せよ．すなわち，$P^{-1}BP$ が対角行列となる直交行列 P，およびそのときの対角行列 $P^{-1}BP$ を求めよ．

(2) V を 2 次実正方行列全体がなす実線形空間とし，$W = \{A \in V \mid \operatorname{tr} A = 0\}$ とおく．ただし，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\operatorname{tr} A = a + d$ と定める．

(a) W は V の部分空間であることを示せ．

(b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．$\{A_1, A_2, A_3\}$ は W の基底であることを示せ．

(c) $P \in V$ とする．$f(A) = AP - PA$（ただし $A \in W$）と定義すると，f は W から W への線形写像であることを示せ．

平成２２年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

[**2**] 次の問に答えよ．

(1) 定数 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ に対し，楕円体

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\}$$

内で $x + y + z$ の最大値を求めよ．

(2) $a > 0$ を定数とし，$g(x)$ を閉区間 $[0, a]$ で定義された連続関数とする．次で $[0, a]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を帰納的に定義する．

$$f_0(x) = g(x),$$

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

このとき，以下の問に答えよ．

(a) $x \geqq s,\ n = 1, 2, \ldots$ に対して，$\displaystyle\int_s^x t(t^2 - s^2)^{n-1} dt$ を求めよ．

(b) $n = 1, 2, 3, \ldots$ のとき，$0 \leqq x \leqq a$ に対して

$$g_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \int_0^x (x^2 - t^2)^{n-1} t g(t) dt$$

とおく．このとき,

$$g_{n+1}(x) = \int_0^x t g_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

を示せ．

(c) $f_1(x) = g_1(x)$ $(0 \leqq x \leqq a)$ を示せ．さらに，$f_n(x) = g_n(x)$ $(0 \leqq x \leqq a,\ n = 2, 3, \ldots)$ を示せ．

(d) 次の条件を満たす数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することを示せ．

i) $n = 1, 2, \ldots$ とすべての $x \in [0, a]$ に対して，$|f_n(x)| \leqq c_n$．

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ は収束する．

平成２２年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

[3] 次の問に答えよ．

(1) 位相空間 X, Y と写像 $f : X \to Y$ に対し

$$\Gamma_f \ = \ \{(x, f(x)) \in X \times Y |\ x \in X\}$$

により, 直積位相空間 $X \times Y$ の部分集合 Γ_f を定義する．このとき，次の問に答えよ．

(a) Y がハウスドルフ空間のとき, f が連続ならば Γ_f は閉集合であることを示せ.

(b) f は連続であるが, Γ_f は閉集合ではない例を挙げよ.

(2) X を高々2 次の実係数多項式の集合とする．$X \times X$ から $[0, \infty)$ への写像 d および d_0 をそれぞれ，$f, g \in X$ に対し，

$$d(f, g) = \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - g(x)|,$$

$$d_0(f, g) = |f(-1) - g(-1)| + |f(0) - g(0)| + |f(1) - g(1)|$$

で定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(a) 多項式 $f(x) = px^2 + qx + r$ （p, q, r は実数）に対して p, q, r を $f(-1), f(0), f(1)$ を用いて表せ.

(b) ある正定数 C が存在して，任意の $f, g \in X$ に対して $d(f, g) \leq Cd_0(f, g)$ が成り立つことを示せ.

(c) 写像 d_0 は集合 X 上の距離となることを示せ.

(d) 距離空間 (X, d_0) の部分集合 $Y = \{f \in X \,|\, [-1, 1]$ 上で $f(x) \geqq 0\}$ は連結であることを示せ.