平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[**1**] 平面 $\mathbb{R}^2$ について次の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の標準的な距離を d とする. また, 各 $p \in \mathbb{R}^2$ に対して, d に関する ε-近傍

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | d(p, x) < \varepsilon\}$$

を $U(p; \varepsilon)$ で表す. このとき, $U(p; \varepsilon)$ が距離空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ の開集合であることを, 定義に従って示せ.

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の距離 $d_{\max}$ を次で定義する.

$$d_{\max}(x, x') := \max\{|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|\}, \quad \text{ただし } x = (x_1, x_2),\ x' = (x'_1, x'_2).$$

このとき, $U(p; \varepsilon)$ が距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ の開集合であることを, 定義に従って示せ.

(3) (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする. 写像 $f : X \to Y$ について次の (ア), (イ) が同値であることを示せ.

(ア) f は連続である. すなわち (Y, d_Y) の任意の開集合 U に対してその逆像 $f^{-1}(U)$ は (X, d_X) の開集合である.

(イ) (Y, d_Y) の任意の点 q の任意の ε-近傍 $V = \{y \in Y | d_Y(q, y) < \varepsilon\}$ に対してその逆像 $f^{-1}(V)$ は (X, d_X) の開集合である.

(4) 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ と $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ が同相であることを示せ.

(5) $\mathbb{R}^2$ 上の距離 d_∞ を次で定義する.

$$d_\infty(x, x') := \begin{cases} 0 & (x = x'), \\ 1 & (x \neq x'). \end{cases}$$

このとき, 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ と $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ は同相でない. その理由を簡潔に説明せよ.

(6) 次で定義される点列 $\{x_n\}$ は, 距離 d_∞ に関して収束しないことを示せ.

$$x_n := \left(\frac{1}{n}, 0\right).$$

平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**2**] 次の (A), (B), (C) にある問いすべてに答えよ.

(A) $I \subset \mathbb{R}$ は開区間とし, f は I 上の関数とする. $a \in I$ に対し, 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ を満たすとき f は $x = a$ で連続であることを ε-δ 論法を用いて示せ.

(2) f は I 上連続, $I \setminus \{a\}$ 上で C^1 級で, $I \setminus \{a\}$ における導関数 f' は $\displaystyle\lim_{x \to a-0} f'(x) = \lim_{x \to a+0} f'(x)$ を満たすとする. この極限の値を A と表す. このとき f は I 上で C^1 級で, $f'(a) = A$ となることを示せ (必要なら平均値の定理を用いても良い). ただし, 関数 h が開集合 J 上で C^1 級とは h は J の各点で微分可能で, 導関数 h' が J 上の連続関数になることをいう.

(B) $\alpha > 0$ と $p,\, q \in \mathbb{R}$ に対し関数 g を

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x^\alpha) & (x \geq 0), \\ px + q & (x < 0) \end{cases}$$

で定める. 次の問いに答えよ. 必要ならば (A) の結果を用いてもよい.

(1) g が $\mathbb{R}$ 上で連続であるとき q を求めよ. さらに $x > 0$ における g の導関数 g' を求めよ.

(2) g が $\mathbb{R}$ 上で C^1 級となるような p が存在するための α の条件を求めよ.

(C) $a > 0$ は定数とする. 次の問いに答えよ.

(1) $0 < \varepsilon < a$ に対し $\displaystyle\int_0^{a-\varepsilon} \frac{1}{a^2 - x^2} dx$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対し, 広義積分 $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{a^2 - x^2} dx$ を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 - x^2} dx$ は収束するかどうか調べよ.

平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**3**] V を 複素数を成分とする 2×2 行列全体のなす複素線形空間とし，行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$$

に対して，写像 $f_A : V \to V$ を

$$f_A(X) = AX - XA$$

により定義する．

(1) f_A は線形写像であることを示せ．

(2) f_A の核 $\mathrm{Ker} f_A$ が E, A を含むことを示せ．ただし，E は 2 次の単位行列とする．

(3) V の基底 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に関する f_A の表現行列 M を求めよ．

(4) f_A が零写像であることと，A が単位行列 E の定数倍であることとが同値であることを示せ．

(5) f_A が零写像でなければ，E, A は $\mathrm{Ker} f_A$ の基底をなすことを示せ．

(6) A の固有値を α, β とすると M の固有値は $0, 0, \alpha - \beta, \beta - \alpha$ であることを示せ．ただし，固有値は重複も含めて並べるものとする．

(7) M が対角化可能であることと，A が対角化可能であることは，同値であることを示せ．