

# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目	平成31年1月実施
---------	------	-----------

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] 実行列  $A$  を  $A = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 8 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$  とおく. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1)  $A$  の階数を計算せよ.
- (2)  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (3)  $B^2 = A$  となるような  $3 \times 3$  行列  $B$  を一つ見つけよ.
- (4)  $E$  を  $3 \times 3$  単位行列として,  $V = \{aE + bA + cA^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$  を  $E, A$  および  $A^2$  を基底とする  $\mathbb{R}$  上の線形空間とする.  $X \in V$  に対し  $\varphi(X) = AX$  と定義するとき,  $\varphi$  が  $V$  から  $V$  への線形写像を定めることを示せ.
- (5)  $\varphi$  を基底  $E, A, A^2$  に関して行列表示せよ.
- (6)  $V$  のある基底に関する  $\varphi$  の行列表示が  $A$  になることを示せ.

# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目	平成31年1月実施
---------	------	-----------

[ 2 ]  $a > 0$  とし,  $I = [0, a] \subset \mathbb{R}$  を閉区間とする. このとき, 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ.

(A)  $c \in \mathbb{R}$  とする. 次の不定積分を計算せよ.

$$\int \frac{1}{x^2 + c} dx.$$

(B) 任意の  $I$  上の連続関数  $f$  と  $g$  に対して,

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy, \quad x \in I$$

とおく. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1)  $f * g = g * f$  を証明せよ.
- (2)  $I$  上の連続関数列  $f_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が  $I$  上  $f$  に一様収束するならば,  $g * f_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) も  $I$  上  $g * f$  に一様収束することを証明せよ.

(C) 以下の問に答えよ.

- (1)  $g : I \rightarrow I$  が連続であるならば,  $g(x) = x$  を満たす  $x \in I$  が存在することを,  $h(x) = g(x) - x$  に中間値の定理を用いて証明せよ.
- (2)  $g : I \rightarrow I$  は連続であって,  $g$  は開区間  $(0, a)$  において微分可能とする. もし任意の  $x \in (0, a)$  に対して  $|g'(x)| < 1$  となるならば,  $g(x) = x$ ,  $x \in I$  となる  $x$  は一意であることを証明せよ.
- (3)  $0 < c < 1/2$  として,  $f(x) = x + c \sin 2x$  とおく. このとき,  $f$  は  $[0, 2\pi]$  から  $[0, 2\pi]$  への写像であり,  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  を満たす  $x$  は一意でないことを証明せよ.

## 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目	平成31年1月実施
---------	------	-----------

[ 3 ]  $X$  を位相空間とし,  $\mathbb{R}$  を実数の集合に通常位相を入れた位相空間とする. また, 閉区間  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  には  $\mathbb{R}$  から誘導された位相が入っているものとする.  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  を連続写像,  $c \in \mathbb{R}$  を定数として, 以下の問に答えよ.

- (1) 集合  $\{y \in \mathbb{R} \mid y < c\}$  が  $\mathbb{R}$  の開集合であることを示せ.
- (2) 集合  $\{x \in X \mid f(x) < c\}$  が  $X$  の開集合であることを, 連続写像の定義に基づいて示せ.
- (3)  $X$  が連結である, すなわち「 $U$  と  $V$  が  $X$  の開集合で  $X = U \cup V$ ,  $U \cap V = \emptyset$  であれば,  $U = \emptyset$  または  $V = \emptyset$  が成り立つ」と仮定する. このとき,  $x, y \in X$  が存在して  $f(x) < c < f(y)$  が成り立つならば,  $z \in X$  が存在して  $f(z) = c$  となることを示せ.
- (4)  $U$  を  $I$  の空でない開集合とし,  $a \in \mathbb{R}$  を  $U$  の下限とする.  $a > 0$  ならば,  $a \notin U$  となることを示せ.
- (5)  $I$  は連結であることを示せ.
- (6)  $X$  が可算連結集合であれば, 連続写像  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  は定数写像であることを示せ. 必要ならば, 実数の任意の空でない开区間は非可算集合であるという事実を用いてよい.