

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成30年8月実施
---------	-----------	-----------

選択問題：次の [4] ~ [11] の 8 問中の 2 問を選んで解答せよ。

[4] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ。

(A) \mathbb{C} の部分集合 $R := \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ について、以下の問に答えよ。

- (1) R が \mathbb{C} の部分環であることを示せ。
- (2) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ について、 $a + b\sqrt{-3} = z(c + d\sqrt{-3})$ となる $z \in R$ が存在するとき、 $a^2 + 3b^2$ は $c^2 + 3d^2$ で割り切れることを示せ。
- (3) $1 + \sqrt{-3}$ が R の既約元であること、すなわち $z, w \in R$ について $zw = 1 + \sqrt{-3}$ が成り立つとき z または w のいずれかは R の乗法に関する可逆元であることを示せ。
- (4) R の単項イデアル $(1 + \sqrt{-3})$ が素イデアルでないことを示せ。

(B) 2 変数多項式環 $\mathbb{R}[x, y]$ から 1 変数多項式環 $\mathbb{R}[t]$ への \mathbb{R} 上の環準同型を

$$\varphi : \mathbb{R}[x, y] \rightarrow \mathbb{R}[t]; f(x, y) \mapsto f(t, t)$$

で定める。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) $x - y \in \text{Ker}(\varphi)$ であることを示せ。
- (2) $\text{Ker}(\varphi) = (x - y)$ であることを示せ。
- (3) $\mathbb{R}[x, y]/(x - y)$ と $\mathbb{R}[t]$ が環として同型であることを示せ。

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成30年8月実施
---------	-----------	-----------

[5] $\alpha := \sqrt{5 + \sqrt{5}}$ とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) α を根にもつ \mathbb{Q} 係数の 4 次多項式 f を求めよ.
- (2) f は \mathbb{Q} 上既約であることを示せ.
- (3) \mathbb{Q} 係数の多項式 $g(t)$ で次数が 3 以下であり, かつ

$$\frac{11}{\alpha + 1} = g(\alpha)$$

を満たすものを求めよ.

- (4) $\beta := \alpha^3/2 - 3\alpha$ とおく. $\beta = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$ を示せ.
- (5) f の分解体を L とするとき, 拡大 L/\mathbb{Q} の拡大次数を求めよ.
- (6) 拡大 L/\mathbb{Q} のガロア群は位数 4 の巡回群であることを示せ.
- (7) 拡大 L/\mathbb{Q} の中間体をすべて求めよ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成 3 0 年 8 月実施
---------	-----------	----------------

[6] $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ で定める.

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

とし, S^2 の座標近傍系 $\{(U_i^\sigma, \varphi_i^\sigma) \mid \sigma = \pm, i = 1, 2, 3\}$ を

$$\begin{aligned} U_1^\pm &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid \pm x_1 > 0\}, & \varphi_1^\pm : U_1^\pm &\rightarrow \mathbb{R}^2; (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3), \\ U_2^\pm &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid \pm x_2 > 0\}, & \varphi_2^\pm : U_2^\pm &\rightarrow \mathbb{R}^2; (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3), \\ U_3^\pm &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid \pm x_3 > 0\}, & \varphi_3^\pm : U_3^\pm &\rightarrow \mathbb{R}^2; (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2) \end{aligned}$$

で定義する. f の S^2 への制限 $f|_{S^2}$ を g とおく. 以下の問に答えよ. ただし, 座標近傍系 $\{(U_i^\sigma, \varphi_i^\sigma) \mid \sigma = \pm, i = 1, 2, 3\}$ のもとで S^2 が 2 次元 C^∞ 多様体となることは断りなく用いてよい.

- (1) f の微分 $df_p : T_p\mathbb{R}^3 \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}$ が全射にならない点 $p \in \mathbb{R}^3$ と, その f による像をすべて求めよ.
- (2) $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は C^∞ 関数であることを示せ.
- (3) g の微分 $dg_p : T_pS^2 \rightarrow T_{g(p)}\mathbb{R}$ が全射にならない点 $p \in S^2$ と, その g による像をすべて求めよ.
- (4) S^2 上の同値関係を

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (x'_1, x'_2, x'_3) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = \pm(x'_1, x'_2, x'_3) \quad ((x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3) \in S^2)$$

により定める. S^2 を同値関係 \sim で割って得られる商空間 S^2/\sim を P^2 とおき, 自然な射影 $\pi : S^2 \rightarrow P^2$ による $p \in S^2$ の像を $[p]$ と表す. $i = 1, 2, 3$ に対して $V_i := \{[p] \mid p \in U_i^+\} \subset P^2$ とおき, $\psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\psi_i([p]) = \varphi_i^+(p)$ (ただし $p \in U_i^+$) により定める. このとき $\{(V_i, \psi_i) \mid i = 1, 2, 3\}$ は P^2 の座標近傍系を与えることを示し, このもとで P^2 が 2 次元 C^∞ 多様体となることを示せ.

- (5) $h : P^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $h([p]) = g(p)$ で定める. h は well-defined な C^∞ 関数であることを示せ.
- (6) h の微分 $dh_{[p]} : T_{[p]}P^2 \rightarrow T_{h([p])}\mathbb{R}$ が全射にならない点 $[p] \in P^2$ と, その h による像をすべて求めよ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成30年8月実施
---------	-----------	-----------

[7] 位相空間 X とその部分空間 A に対して, X から A へのレトラクションとは, X から A への連続写像でその A への制限が A 上の恒等写像であるものをいう. 以下の問に答えよ. ただし D^2 と S^1 はそれぞれ以下で定義される円板と円周を表す.

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \quad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

- (1) 穴あき円板 $D^2 \setminus \{0\}$ からその部分空間 S^1 へのレトラクション $f: D^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$ を一つ構成し, f がホモトピー同値写像であることを証明せよ.
- (2) 弧状連結な位相空間 X から弧状連結な部分空間 A へのレトラクション $f: X \rightarrow A$ が誘導する基本群の間の準同型は全射であることを証明せよ.
- (3) トーラス $T = S^1 \times S^1$ 上の円周 $S^1 \times \{1\}$ に沿って円板 D^2 を貼り付けて得られる位相空間 $(S^1 \times S^1) \cup (D^2 \times \{1\})$ を X とする. X の基本群を求めよ.
- (4) (3) において, 位相空間 X から部分空間 T へのレトラクションが存在しないことを証明せよ.
- (5) (3) の位相空間 X の整数係数ホモロジー群を求めよ.
- (6) (3) の位相空間 X はソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ の部分空間である. $D^2 \times S^1$ から X へのレトラクションが存在しないことを証明せよ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成30年8月実施
---------	-----------	-----------

[8] $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を複素数列とし, $P(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ とする. D を \mathbb{C} の領域とし, D 上の正則関数 $f(z)$ に対し,

$$\mathcal{P}f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(z)$$

とする. ただし, $f^{(n)}(z)$ は $f(z)$ の n 階導関数とする. 以下の問に答えよ.

(1) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, 以下の条件 (A), (B) が同値であることを示せ.

(A) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し定数 $C_\varepsilon > 0$ が存在し $|a_n| \leq C_\varepsilon \frac{\varepsilon^n}{n!}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を満たす.

(B) $P(\zeta)$ は \mathbb{C} 上正則で, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し定数 $C_\varepsilon > 0$ が存在し $|P(\zeta)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|}$ ($\zeta \in \mathbb{C}$) を満たす.

(2) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が (1) の条件 (A) を満たすとき, $\mathcal{P}f(z)$ は D 上正則となることを示せ.

(3) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする. $g(z) = z^{-1}$ としたとき, $\mathcal{P}g(z)$ が \mathbb{C}^* 上収束するならば, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は (1) の条件 (A) を満たすことを示せ.

(4) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は (1) の条件 (A) を満たすとする. $g_w(z) = \frac{1}{2\pi i(w-z)}$ とし, $K(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_w^{(n)}(z)$ とする. ただし, $g_w^{(n)}(z)$ は $g_w(z)$ の n 階導関数とする. このとき, $a \in D$ に対し

$$\mathcal{P}f(a) = \int_{C(a;r)} K(w, a) f(w) dw$$

となることを示せ. ただし, $r > 0$ は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\} \subset D$ となるように取り, $C(a; r)$ は $z = re^{2\pi it} + a$ ($t \in [0, 1]$) により定まる曲線とする.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成30年8月実施
---------	-----------	-----------

[9] 1次元ルベグ測度に関する, ルベグ可測集合 $A \subset \mathbb{R}$ 上のルベグ可測関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ の積分を $\int_A f(x) dx$ と表す. 次の (A), (B), (C) のすべての間に答えよ.

(A) p, q を実数とする. 以下の間に答えよ.

- (1) 積分 $\int_{(0,1)} x^p dx$ の収束・発散を判定せよ.
- (2) 区間 $(0, 1)$ 上の関数 $x^p(1-x)^q$ がルベグ可積分であるための実数 p, q の条件を求めよ.
- (3) $\int_{(0,1)} x^{-1/2}(1-x)^{-1/2} dx = \pi$ が成り立つことを示せ.

(B) $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を非負ルベグ可測関数とする. 以下の間に答えよ.

(1) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_{(0,+\infty)} f(x) \left(\int_{(x,+\infty)} g(y-x) dy \right) dx = \int_{(0,+\infty)} \left(\int_{(0,y)} f(x)g(y-x) dx \right) dy$$

(2) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_{(0,+\infty)} f(x) dx \int_{(0,+\infty)} g(y) dy = \int_{(0,+\infty)} \left(\int_{(0,1)} f(yx)g(y-yx)y dx \right) dy$$

(3) $\int_{(0,+\infty)} x^{-1/2}e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$ が成り立つことを示せ.

(C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{(0,n)} x^{-1/2}(1-x/n)^n dx = \sqrt{\pi}$ が成り立つことを示せ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成30年8月実施
---------	-----------	-----------

[10] 確率変数 $X_1, \dots, X_n, \dots, Y_1, \dots, Y_n, \dots$ は独立であるとする. 確率変数列 $\{X_n\}$ は同一の確率分布に従い, $0 < p < 1$ が存在して $P(X_1 = 1) = p, P(X_1 = 0) = 1 - p$ が成り立つとする. また確率変数列 $\{Y_n\}$ は同一の確率分布に従い, Y_1 の平均は 0 で分散は 1 であるとする. ここで, X_1, \dots, X_n のうち 1 に等しいものの個数を S_n とし,

$$T_n = \sum_{k=1}^n X_k Y_k, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{S_n} Y_k$$

とする. 以下の問に答えよ.

- (1) $X_1 Y_1$ の平均と分散を求めよ.
- (2) Y_1 の確率分布が区間 (a, b) 上の一様分布であるとき, a, b の値を求めよ.
- (3) 確率変数列 $n^{-2/3} T_n$ は確率収束することを示し, 極限を求めよ.
- (4) 確率変数列 $n^{-1/2} T_n$ は分布収束することを示し, 極限分布を求めよ.
- (5) T_n と Z_n は同じ分布に従うことを示せ.
- (6) 実数 x に対して極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x\sqrt{np})$ を求めよ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数 学 専 攻	専門科目 (午後)	平成 30 年 8 月実施
---------	-----------	---------------

[11] 2 階線形常微分方程式

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 0 \quad \dots\dots(*)$$

を考える。次の問に答えよ。

(1) (*) の解で $x(0) = 1, x'(0) = 3$ を満たすものを求めよ。

(2) (*) の解 $x(t)$ に対し, $y_1(t) = x(t), y_2(t) = px(t) + qx'(t)$ とおく。ただし p, q は定数とする。このときベクトル値関数 $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ が

$$y'(t) = Ay(t) \quad \dots\dots(**) \quad \text{ただし} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad b \geq 0$$

を満たすように p, q , および上の形の t によらない行列 A を求めよ。

(3) t に依存した行列 $\Phi(t)$ で, (**) の任意の解 $y(t)$ に対し $y(t) = \Phi(t)y(0)$ ($t \geq 0$) となるものを求めよ。

(4) 常微分方程式系

$$v'(t) = (A + B(t))v(t) \quad \dots\dots(\#)$$

の解 $v(t)$ に対し, $w(t) = \Phi(-t)v(t)$ とおく。 $w(t)$ が満たすべき常微分方程式系を導け。ただし, 行列 $B(t)$ の各 (i, j) 成分 $b_{ij}(t)$ は $[0, \infty)$ 上で連続とする。

(5) (4) の各 $b_{ij}(t)$ は $[0, \infty)$ 上で可積分とすると (4) で定めた $w(t)$ は $[0, \infty)$ 上で有界であることを示せ。

(6) 半無限区間 $[0, \infty)$ 上で定義された連続関数 $p(t), q(t)$ に対し常微分方程式

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0 \quad \dots\dots(\#\#)$$

を考える。関数 $p(t) - 2, q(t) - 5$ が $[0, \infty)$ 上で可積分ならば (##) の解 $u(t)$ は $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ を満たすことを示せ。