広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	令和元年８月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 高々 2 次の実係数多項式全体のなす実数 $\mathbb{R}$ 上の線形空間を V とする．ただし多項式の変数は x とする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{T} = \{1 + x^2, x + x^2, 1 + x + 3x^2\}$ は V の基底をなすことを示せ．

(2) 線形写像 $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ は

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x^2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

を満たすとする．(1) で定めた V の基底 $\mathcal{T}$ と $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する φ の表現行列 X を求めよ．

(3) (2) で定めた線形写像 φ の像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積に関する直交補空間 $(\mathrm{Im}\,\varphi)^\perp$ を求めよ．

(B) $\mathbb{R}^4$ の 4 個のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と 4×4 行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}_4$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合で表せ．

(3) A のすべての固有値と，対応する固有空間の基底を一組ずつ求めよ．

(4) A のジョルダン標準形 J と，$P^{-1}AP = J$ となる正則行列 P を求めよ．

(5) 自然数 $k \geq 2$ に対して A^k を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	令和元年８月実施

[**2**] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ.

(A) 以下の問に答えよ.

(1) 正の実数 R に対し，$A_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < R^2,\ x > 0,\ y > 0\}$ とおく．A_R を極座標を用いて表示せよ.

(2) 次の値を求めよ.

$$\lim_{R \to \infty} \iint_{A_R} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

(B) $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2y - 2y^2 + y$ とする．以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ となる点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ.

(2) $f(x, y)$ のすべての極値を求めよ.

(C) 以下の問に答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^3}{(1 + x^2)^{k+1}}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示し，その和を求めよ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^{k+1}}$ は任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して収束することを示せ.

(3) (2) の級数が区間 $[a, \infty)$ で一様収束するための実数 a の条件を求めよ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	令和元年８月実施

[**3**] 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を通常の位相で位相空間とみなし，その位相（開集合系）を $\mathcal{O}$ と表す．次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) X を位相空間とする．写像 $f_1 : X \to \mathbb{R}$ と $f_2 : X \to \mathbb{R}$ に対し，写像 $f : X \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \qquad (x \in X)$$

により定義する．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ の任意の部分集合 U, V に対し，f による $U \cap V$ の逆像 $f^{-1}(U \cap V)$ は

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$$

を満たすことを示せ．

(2) 写像 f_1, f_2 が連続ならば，任意の実数 c に対し $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ は X の開集合となることを示せ．

(3) 写像 f_1, f_2 が連続ならば，f は連続であることを示せ．

(B) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合系 $\mathcal{O}_0$ を $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O} \cup \{\, U \cup \{0\} \mid U \in \mathcal{O}\,\}$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) 部分集合系 $\mathcal{O}_0$ は集合 $\mathbb{R}$ の位相であることを示せ．

(2) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_0)$ を $\mathbb{R}_0$ と表す．$\mathbb{R}_0$ は連結でないことを示せ．

(3) 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0$ を $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める．f は連続写像でないことを示せ．

(4) 写像 $g : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で定める．この写像 g は連続であるが，同相写像ではないことを示せ．但し，$\mathbb{R}_0$ の部分集合 $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\,\}$ に $\mathcal{O}_0$ に関する相対位相を入れたとき，写像 g を Y 上に制限してできる写像 $h : Y \to \mathbb{R}$ は連続であることは証明なしに用いてもよい．

(5) 位相空間 $\mathbb{R}_0$ は距離づけ可能であることを示せ．