広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和４ 年１ 月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[1] 各 3×3 実行列 A，自然数 n について，3×3 実行列 $S_n(A)$ を

$$S_n(A) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$$

と定める．また各 3×3 実行列 A について，3×3 実行列 e^A を

$$e^A := \lim_{n\to\infty} S_n(A)$$

と定める．ただし $\lim_{n\to\infty} S_n(A)$ は行列 $S_n(A)$ の各成分についてそれぞれ $n\to\infty$ で極限をとって得られる行列とする．

以下，

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とし，B のジョルダン標準形を J とおく．

以下の問いに答えよ．

(1) B の行列式と固有値を求めよ．

(2) B のジョルダン標準形 J を求めよ．また正則行列 P であって $J = P^{-1}BP$ となるものを一つ求め，その逆行列 P^{-1} も求めよ．

(3) 任意の自然数 n について以下の等式が成り立つことを示せ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 行列 e^J を求めよ．

(5) 正則行列 P が $J = P^{-1}BP$ を満たすとき，

$$e^B = Pe^J P^{-1}$$

となることを示せ．

(6) 行列 e^B を求めよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和４年１月実施

[**2**] 次の (A)，(B)，(C) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$ の値を求めよ．

(2) 広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2+6xy-10y^2}dxdy$ の値を求めよ．

(B) 以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$, $g(x)$ は $[0,\infty)$ 上の実数値連続関数とする．広義積分

$$\int_0^\infty f(x)^2dx, \quad \int_0^\infty g(x)^2dx$$

が収束するとき，以下の広義積分も収束することを示せ．

$$\int_0^\infty (f(x)+g(x))^2dx$$

(2) 区間 $[0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が，$[0,1]$ 上で連続関数 g に一様収束するならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$$

が成り立つことを示せ．

(C) 以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}}$ が収束することを示せ．

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は，$|a_{n+1}-a_n| \le \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ $(n\in\mathbb{N})$ を満たすとする．このとき，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が収束することを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和４年１月実施

[**3**] 次の (I), (II) のいずれかの問に答えよ．

(I) 次の (A), (B)，(C) のすべての問に答えよ．

(A) X，Y を集合とし，$f : X \to Y$ を写像とする．X の部分集合 A，B について，$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ が成り立つか否か判定し，理由とともに答えよ．

(B) X，Y を集合とし，$f : X \to Y$ を写像とする．Y には開集合系 $\mathcal{O}_Y$ による位相が入っているとし，

$$\mathcal{O}_X := \{A \subset X \mid A = f^{-1}(O), O \in \mathcal{O}_Y\}$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{O}_X$ が X の開集合系の公理を満たすことを示せ．

(2) f が全射とする．Y がコンパクトなら $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトと言えるかどうか判定し，理由とともに答えよ．

(3) f が単射とする．Y がハウスドルフなら $(X, \mathcal{O}_X)$ がハウスドルフと言えるかどうか判定し，理由とともに答えよ．

(C) X を位相空間とする．以下の問に答えよ．

(1) X の開部分集合 O と任意の部分集合 S に対し，$O \cap \overline{S} \subset \overline{O \cap S}$ が言えるかどうか判定し，理由とともに答えよ．

(2) X の部分集合 A が任意の部分集合 S に対し，$A \cap \overline{S} \subset \overline{A \cap S}$ を満たすとする．このとき，A が開集合であるかどうか判定し，理由とともに答えよ．

(II) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) 確率変数 X と Y は独立で，共に $(0,1)$ 上の一様分布に従うとする．このとき，$\min\{X,Y\}$ の確率密度関数を求めよ．

(2) 確率変数 X と Y は独立で，共に確率密度関数 $(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ $(x \in \mathbb{R})$ を持つ標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとする．このとき，条件付き期待値 $\mathrm{E}(X+Y|X \leq 0)$ の値を求めよ．

(B) 確率変数 X が，分布関数

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\gamma} & (x \geq 1) \\ 0 & (x < 1) \end{cases}$$

をもつ確率分布に従うとする．ただし，$\gamma > 2$ とする．以下の問に答えよ．

(1) X の確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ．

(2) X の期待値 $\mathrm{E}(X)$ と分散 $\mathrm{Var}(X)$ を求めよ．

(3) $Y = (\gamma - 1)X - \gamma$ とおくとき，Y の分布関数 $F_Y(y)$ を求めよ．

(4) $\gamma \to \infty$ のとき，(3) で定めた Y はある確率変数 Z に分布収束する．Z の分布関数 $F_Z(z)$ を求めよ．