広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和 5 年 1 月実施

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[**1**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) A を n 次 (n は正の整数とする) の正方行列とする. また, O は n 次の零行列, E は n 次の単位行列とする. 以下の問に答えよ.

(1) ある正の整数 m に対して, A が $A^{m+1} = O$ を満たすとする. このとき $E - A$ の逆行列を A を用いて表せ.

(2) A が $A^5 = O$ をみたすとする. このとき

$$E - A + 2A^2 - 3A^3 + 4A^4$$

の逆行列を A を用いて表せ.

(3) $n = 5$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき $E - A + 2A^2 - 3A^3 + 4A^4$ の逆行列を求めよ.

(B) 行列 $C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) C の逆行列を求めよ.

(2) C の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ について, 極限 $\lim_{n\to\infty} C^n \mathbf{v}$ が存在するための s, t, u の条件を求めよ.

[**2**] $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定める．また，正の整数 n に対して，$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g_n(x) = f(x,n)$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) 関数列 $\{g_n\}$ が $\mathbb{R}$ の任意の有界集合上で一様収束することを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 \int_0^{1/n} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$ を求めよ.

(3) f の x と y に関する 1 次偏導関数を求めよ.

(4) f が $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数であるか否かを調べよ.

(5) 重積分 $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,dxdy$ の値を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和５年１月実施

[**3**] 次の (I), (II) のいずれかの問に答えよ．

(I) $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^3$ のそれぞれを通常の位相で位相空間とみなす．また

$$
\begin{aligned}
E &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\},\\
S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},\\
S_0 &= S \setminus \{(0,0,1)\}
\end{aligned}
$$

とし，S と S_0 を $\mathbb{R}^3$ の相対位相を入れて位相空間とみなす．$\varphi : \mathbb{R}^2 \to S_0$ を同相写像とし，$\varphi(E)$ の S における閉包を A とする．

次の (1)〜(5) の記述のうち，正しいものについてはその証明を与え，正しくないものについてはその理由を述べよ．

(1) E は $\mathbb{R}^2$ の閉部分集合である．

(2) $\varphi(E)$ は S_0 のコンパクト部分集合である．

(3) A は S のコンパクト部分集合である．

(4) $\varphi(E)$ は S_0 の連結部分集合である．

(5) A は S の連結部分集合である．

(II) $0 < p < 1$ とし，成功する確率が p で失敗する確率が $1-p$ であるような試行を独立に繰り返したときに，成功するまでの試行回数を表す確率変数を X とする．以下の問に答えよ．

(1) 正の整数 n に対して確率 $\mathrm{P}(X=n)$ を求めよ．

(2) X の特性関数が $\varphi(t) = \dfrac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$ となることを示せ．

(3) X の期待値は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X>n)$ と等しいことを示せ．

(4) 非負整数 m, n に対して

$$\mathrm{P}(X > m+n \mid X > n) = \mathrm{P}(X > m)$$

が成り立つことを示せ．

(5) $X = 5$ であったとする．このとき，帰無仮説 $H_0 : 1/p = 2$, 対立仮説 $H_1 : 1/p > 2$ に対する仮説検定を，有意水準 6.25% で行え．

(6) (5) の検定において，p の本当の値が $1/5$ だったときの検出力を計算せよ．