広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）

受験番号	M

令和４年　８月　２５日　　　１３：３０　～　１６：３０

注　意　事　項

1．以下の用紙が配布されている．

問題用紙（表紙を含む）	１０　枚
解答用紙	２　枚
下書き用紙	２　枚

2．問題は全部で　９　問ある．この中から　２　問選んで解答せよ．

3．問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ．紙面が不足した場合は裏面を使用してよい．

4．試験問題の表紙，解答用紙，および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ．

5．試験終了時には，すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和４年８月実施

選択問題：次の [4] ～ [12] の９問中の２問を選んで解答せよ.

[**4**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) この問題においては，可換環 R の部分環とは，R の部分集合 S であって，加法に関して部分群をなし，かつ任意の $x, y \in S$ について $xy \in S$ が成り立つようなものを指す．(R が乗法についての単位元 1_R をもつ環であっても，$1_R \in S$ を要求しないことに注意する．) 以下，単位元といえば乗法についての単位元を表すものとする.

(1) 実数体 $\mathbb{R}$ の部分環であって $\mathbb{R}$ の単位元 1 を含まないものの例を一つ挙げよ.

(2) 整数環 $\mathbb{Z}$ の部分環をすべて求めよ.

(3) R が単位元 1_R をもつ整域であるとする．R の部分環 S であって，1_R を含まず，かつ S が単位元をもつようなものをすべて求めよ.

(4) 単位元をもつ可換環 R, S および加法・乗法を保つ写像 $f\colon R \to S$ であって，f が R の単位元を S の単位元に写さないようなものの例を挙げよ.

(5) 単位元をもつ可換環 R, S および加法・乗法を保つ全射 $f\colon R \to S$ について，f は R の単位元を S の単位元に写すことを示せ.

(B) 複素数係数の二変数多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ において，x^2 および xy の生成するイデアルを $I = (x^2, xy)$ とおく.

(1) $f \in I$ ならば f は x で割り切れることを示せ.

(2) $x^3 + xy^4 \in I$ を示せ.

(3) I は単項イデアルでないことを示せ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和４年８月実施

[**5**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 複素数を成分とする 2×2 の正則行列全体が行列の積に関してなす群を $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ と書く．

$$\zeta := \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}\right)$$

とおき，$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の二つの元

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{pmatrix}$$

を考える．ここで $\bar{\zeta}$ は ζ の複素共役である．$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の部分集合 G を

$$G := \{\, A^i B^j \mid i \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{Z} \,\}$$

により定義する．以下の問に答えよ．

(1) G は $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の部分群であることを示し，その位数を求めよ．

(2) G の部分集合

$$\langle B \rangle := \{\, B^j \mid j \in \mathbb{Z} \,\}$$

は G の正規部分群か否かを理由とともに答えよ．

(3) G の部分群で位数が 2 のものの個数を求めよ．

(B) $f(x)$ を有理数係数の 4 次式とする．$f(x)$ は多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ において既約であるとし，$f(x) = 0$ の複素数解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とする．また $f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を $L := \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ と書く．さらに，多項式 $f(x)$ の有理数体上のガロア群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は

$$g(\alpha_1) = \alpha_2, \quad g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_4, \quad g(\alpha_4) = \alpha_3$$

なる元 g と

$$h(\alpha_1) = \alpha_2, \quad h(\alpha_2) = \alpha_3, \quad h(\alpha_3) = \alpha_4, \quad h(\alpha_4) = \alpha_1$$

なる元 h により生成されているとする．以下の問に答えよ．

(1) L の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ．

(2) 複素数

$$\delta := \prod_{1 \le i < j \le 4} (\alpha_i - \alpha_j)$$

は有理数か否かを理由とともに答えよ．

(3) 体の拡大 $L/\mathbb{Q}$ の中間体 M で $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数 $[M : \mathbb{Q}]$ が 4 となるものの個数を求めよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 4 年 8 月実施

[**6**] $\mathbb{C}^2$ の部分空間 X を $X := \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ と定める．また X 上の同値関係 $\sim$ を

$$v \sim v' \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ such that } v = \lambda v' \quad (v, v' \in X)$$

により定め，X の $\sim$ による商空間を $X/\sim$ と書く．各 $v = (z_1, z_2) \in X$ について，v が代表する同値類 $[v]$ を $[z_1 : z_2]$ と表す．また $\mathbb{R}^3$ の正則部分多様体

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

について考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 各 $i = 1, 2$ について，$X/\sim$ の開集合 O_i を $O_i := \{[z_1 : z_2] \in X/\sim \mid (z_1, z_2) \in X, z_i \neq 0\}$ と定め，写像 u_i を

$$u_1 : O_1 \to \mathbb{R}^2,\ [z_1 : z_2] \mapsto (\mathrm{Re}\,(z_2/z_1), \mathrm{Im}\,(z_2/z_1)),$$
$$u_2 : O_2 \to \mathbb{R}^2,\ [z_1 : z_2] \mapsto (\mathrm{Re}\,(z_1/z_2), \mathrm{Im}\,(z_1/z_2))$$

と定める．$\mathcal{A} := \{(O_1, \mathbb{R}^2, u_1), (O_2, \mathbb{R}^2, u_2)\}$ は $X/\sim$ 上の C^∞ 級アトラスを定め，特に $X/\sim$ は実 2 次元 C^∞ 級多様体となる．このとき局所座標 u_1 から u_2 への座標変換を書き下せ．ただし定義域と値域も明記すること．

(2) 各 $v = (z_1, z_2) \in X$ について，2 次正方複素行列 Q_v を

$$Q_v := \begin{pmatrix} z_1 & \overline{z_2} \\ z_2 & -\overline{z_1} \end{pmatrix}$$

と定める．このとき Q_v は複素正則行列であることを示せ．また，各 $v = (z_1, z_2) \in X$ について，2 次正方複素行列 H_v を

$$H_v = Q_v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_v^{-1}$$

と定める．$v, v' \in X$ が $[v] = [v']$ を満たすとき，$H_v = H_{v'}$ となることを示せ．

(3) (2) の設定において，各 $v \in X$ について，行列 H_v の (i, j) 成分を $h_{ij}(v)$ とおく．このとき $h_{11}(v)$ は実数であることを示せ．また

$$x_v := \big(2h_{11}(v) - 1, 2(\mathrm{Re}\, h_{12}(v)), 2(\mathrm{Im}\, h_{12}(v))\big)$$

とおくと，$x_v \in S^2$ となることを示せ．

(4) (3) の設定において，写像

$$\varphi : X/\sim \to S^2,\ [v] \mapsto x_v$$

が well-defined であることを示せ．また (1) で定めた $X/\sim$ の C^∞ 級多様体構造について，φ が $X/\sim$ から S^2 への C^∞ 級写像となることを示せ．さらに $p = [1 : 0] \in X/\sim$ について，φ の p における全微分 $(d\varphi)_p$ の階数を求めよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午後）	令和４年８月実施

[**7**] 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 S^2，X，Y をそれぞれ次で定義する．

$$\begin{aligned} S^2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}, \\ X &= S^2 \cup \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \\ Y &= S^2 \cup \{(x_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| \leq 1\}. \end{aligned}$$

以下の問に答えよ．

(1) X の基本群を求めよ．

(2) Y の基本群を求めよ．

(3) X から Y へのレトラクションが存在するか否かを判定せよ．

(4) S^2 の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(5) X の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(6) $f : X \to X$ を連続写像とする．f が誘導する整数係数 2 次元ホモロジー群の間の準同型写像 $f_\# : H_2(X) \to H_2(X)$ が単射であるならば，f は全射であることを証明せよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午後）	令和４年８月実施

[**8**] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．

(A) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \mathrm{Re}\, z < 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ とおく．ただし，$w \in \mathbb{C}$ に対して $\mathrm{Re}\, w$ は w の実部，$\mathrm{Im}\, w$ は w の虚部を表す．以下の問に答えよ．

(1) $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ とおく．このとき，f は D_1 から D_2 への全単射であることを示せ．

(2) $g(z) = \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3$ とおく．このとき，g による D_1 の像 $g(D_1)$ を複素平面に図示せよ．

(B) C を複素平面内の単位円周 $|z| = 1$ とし，C の向きは反時計回りとする．次の (1), (2) の複素線積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^4 - 8z}$.

(2) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{|z-2i|^2}$.

(C) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とし，$f : D \to \mathbb{C}$ は D 上で正則な関数であり，$f(0) = 0$ を満たすと仮定する．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $g : D \to \mathbb{C}$ を

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & (0 < |z| < 1) \\ f'(0) & (z = 0) \end{cases}$$

で定義するとき，g は D 上で正則な関数であることを示せ．

(2) $r \in (0,1)$ とし，$M = \max_{|z| \le r} |f(z)|$ とする．このとき，任意の $|z| \le r$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ に対して $|f(z)| \le \dfrac{M}{r}|z|$ が成り立つことを示せ．

(3) $h : D \to \mathbb{C}$ を

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n) = f(z) + f(z^2) + f(z^3) + \cdots + f(z^n) + \cdots$$

と定義するとき，h は D 上で正則な関数であることを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和４年８月実施

[**9**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) 非負の実数 a, b が $|a-b| = a+b$ を満たすならば，$a=0$ あるいは $b=0$ であることを示せ．

(2) g は $\mathbb{R}$ 上の非負ルベーグ可積分関数で $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 0$ を満たすとする．このとき，$\mathbb{R}$ 上ほとんどいたる所で $g(x)=0$ となることを示せ．

(3) f は $\mathbb{R}$ 上の実数値ルベーグ可積分関数で

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

を満たすとする．このとき，次の (i), (ii) のいずれかが成り立つことを示せ．

(i) $\mathbb{R}$ 上ほとんどいたる所で $f(x) \geq 0$.

(ii) $\mathbb{R}$ 上ほとんどいたる所で $f(x) \leq 0$.

(B) $p \in (0, \infty)$ とし，g を $[1, \infty)$ 上の有界な実数値ルベーグ可測関数で $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = p$ を満たすものとする．関数 $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ を $f(x) = \exp\left(\displaystyle\int_1^x \frac{g(u)}{u}du\right)$ で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $t \geq 1$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^t \frac{g(nv)}{v}dv = \log(t^p)$ を示せ．

(2) $t \geq 1$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(nt)}{f(n)} = t^p$ を示せ．

(3) ある $M \in (0, \infty)$ に対し，次が成り立つことを示せ．

$$0 < \frac{f(tx)}{f(x)} \leq t^M \qquad (x \geq 1, \quad t \geq 1).$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nf(n)} \int_n^{3n} f(u)du$ を求めよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和４年８月実施

[**10**] 確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列 $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ を考える．各 $n = 1, 2, \dots$ に対して，$X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ は互いに独立で次の確率密度関数 $f_n(x)$ をもつ同一の分布に従うとする．

$$f_n(x) = p_n \phi(x \,|\, \mu) + (1 - p_n)\phi(x \,|\, \mu + \delta_n) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ただし，$a \in \mathbb{R}$ に対して，$\phi(\cdot \,|\, a)$ は平均 a，分散 1 の正規分布の確率密度関数

$$\phi(x \,|\, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を表し，$p_n \in (0, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\delta_n > 0$ は定数とする．さらに，各 $n = 1, 2, \dots$ に対して，

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して，$X_{n,1}$ の期待値と分散を求めよ．

(2) ある定数 $\delta > 0$ が存在して，任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $\delta_n = \delta$ が成立し，$p_n \to 1$ $(n \to \infty)$ が成立するとする．このとき，$\bar{X}_n$ が μ に確率収束することを示せ．

以下では，ある定数 $p \in (0, 1)$ が存在して，任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $p_n = p$ が成立し，$\delta_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ であるとする．

(3) 次が成立することを示せ．

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(X_{n,1} < \frac{\delta_n}{2}\right) = p.$$

(4) 各 $n = 1, 2, \dots$ に対し，

$$Y_{n,i} = X_{n,i} I\left(X_{n,i} \geq \frac{\delta_n}{2}\right) \quad (i = 1, \dots, n), \qquad \bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{n,i}$$

とおく．ただし，$I(\cdot)$ は定義関数を表し，括弧内が真であれば 1，そうでなければ 0 となる関数である．このとき，任意の $M > 0$ に対し，

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(\bar{Y}_n \geq M) = 1$$

が成立することを示せ．

(5) 各 $n = 1, 2, \dots$ に対し，$Z_{n,i} = X_{n,i} - Y_{n,i}$ $(i = 1, \dots, n)$ とおく．

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_{n,i}$$

が $p\mu$ に確率収束することを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午後）	令和４年８月実施

[**11**] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．ただし，常微分方程式の解は実数値関数を考えるものとする．

(A) 次の常微分方程式

$$(*) \qquad y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$$

を考える．

(1) $(*)$ の解で $y_0(x) = \dfrac{a}{x}$ の形のものを求めよ．ただし，a は正の実数とする．

(2) $(*)$ の解 y に対して，(1) の $y_0(x)$ を用いて $u(x) = y(x) - y_0(x)$ とおく．このとき u の満たす微分方程式を求めよ．

(3) $(*)$ の解で $y(1) = 3$ を満たすものを求めよ．

(B) $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，$y = y(x)$ に関する次の常微分方程式の初期値問題

$$(**) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + (\tan x)\dfrac{dy}{dx} + 2(\cos^2 x)y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

を考える．

(1) $(**)$ の解 $y = y(x)$ に対して $Y(t) = y(x), t = \sin x$ と定める．このとき $Y = Y(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2) 初期値問題 $(**)$ を解け．

(C) $y(t)$ は $[0, \infty)$ 上で定義された C^2 級の関数とし，次の常微分方程式を満たすとする．

$$y'' + 2y' - 2y + y^3 = 0, \quad t > 0.$$

この $y(t)$ により関数 $E(t)$ を次で定める．

$$E(t) = \frac{1}{2}y'(t)^2 - y(t)^2 + \frac{1}{4}y(t)^4.$$

以下の問に答えよ．

(1) $t_1 \geq t_2 \geq 0$ に対して $E(t_1) \leq E(t_2)$ が成り立つことを示せ．

(2) 極限 $\lim_{t\to\infty} E(t)$ が存在することを示せ．

(3) この関数 y は $y(0) = 1, y'(0) = 0$ を満たすとする．このとき，$t > 0$ において $y(t) > 0$ であることを示せ．さらに，ある実数 α に対して $\lim_{t\to\infty} y(t) = \alpha$ を満たすならば，$\alpha = \sqrt{2}$ であることを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和４年８月実施

[**12**] $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 1)$ を互いに独立にいずれも一様分布 $U(0, \theta)$ $(\theta > 0)$ に従う確率変数列とし，その実現値を $x_1, \ldots, x_n$ とする．ここで，一様分布 $U(0, \theta)$ の確率密度関数は

$$f(x \,|\, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & (0 \leq x \leq \theta) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられる．$X_{(n)} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$ と定義し，その実現値を $x_{(n)} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$ とする．また，θ の推定量 $\hat{\theta}$ の平均二乗誤差を $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ と定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) θ の最尤推定量を $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ とするとき，$\hat{\theta}_{\mathrm{ML}} = X_{(n)}$ であることを示せ．

(2) $T = X_{(n)}$ とするとき，T の従う確率分布の確率密度関数を求めよ．

(3) $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ は θ の不偏推定量であるかどうかを理由とともに答えよ．

(4) $X_{(n)}$ は θ の十分統計量であることを示せ．

(5) $X_{(n)}$ は完備であることが知られている．このとき，θ の一様最小分散不偏 (UMVU) 推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{UMVU}}$ を求めよ．

(6) θ も確率変数とみなし，パラメータ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ をもつようなパレート分布に従うとする．ただし，パレート分布の確率密度関数は

$$g(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\beta \alpha^{\beta}}{\theta^{\beta+1}} & (\theta \geq \alpha) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である．$\beta > 1$ のとき，θ の平均を α と β を用いて表せ．

以降，$x_{(n)} > \alpha$ を仮定する．

(7) $X = (X_1, \ldots, X_n)$ と θ の同時確率密度関数を $p(x, \theta) = g(\theta) f(x \,|\, \theta)$ とおく．このとき，X の周辺確率密度関数 $q(x)$ を求めよ．

(8) $x = (x_1, \ldots, x_n)$ が与えられた下での θ の確率密度関数 $h(\theta \,|\, x)$ は

$$h(\theta \,|\, x) = \frac{p(x, \theta)}{q(x)}$$

により与えられる．この $h(\theta \,|\, x)$ に対応する確率分布の名称を答え，その平均 $\hat{\theta}_{\mathrm{B}}$ を n, β, $x_{(n)}$ を用いて表せ．

(9) (8) で求めた $\hat{\theta}_{\mathrm{B}}$ において，$\beta = 2$ とし，$x_{(n)}$ を確率変数 $X_{(n)}$ に置き換えたとき，$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_{\mathrm{B}})$ を計算せよ．また，$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_{\mathrm{B}})$ と (5) で求めた $\hat{\theta}_{\mathrm{UMVU}}$ の平均二乗誤差 $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_{\mathrm{UMVU}})$ との大小を比較せよ．