広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）

受験番号	M

令和４年　８月　２５日　　　　９：００ 〜 １２：００

注　意　事　項

１. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙（表紙を含む）	5　枚
解答用紙	3　枚
下書き用紙	3　枚

２. 問題は全部で　3　問ある.

３. 問 [3] では，(I) か (II) かいずれかの問題を選んで解答せよ.

４. 問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ．紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

５. 試験問題の表紙，解答用紙，および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ.

６. 試験終了時には，すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）	令和４年８月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) a を実定数とし，実行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) A の階数が 2 となるような a の値を求めよ．

(2) a を (1) で求めた値とする．x, y, z を未知数, p, q, r を定数とする．実線形方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

が解をもつための必要十分条件を p, q, r を用いて表し，それが成り立つときの一般解を r を用いない形で求めよ．

(B) 有限次元実線形空間 V 上の線形写像 $A : V \longrightarrow V$ は $A^3 = I$ (ただし，I は V 上の恒等写像) を満たすとする．$B = (I + A + A^2)/3$，$C = I - B$, $X = \operatorname{Ker} B$，$Y = \operatorname{Ker} C$ とする．以下の問に答えよ．ただし，写像の合成を積とみなし, 線形写像 $T : V \longrightarrow V$ に対してその核を $\operatorname{Ker} T$ と表す．

(1) $BC = CB = O$ を示せ．ただし，O は V 上の零値写像 (すべての V の元を V の零ベクトルに写す写像) である．

(2) $V = X \oplus Y$ を示せ．ただし，$\oplus$ はベクトル空間の直和を表す．

(3) $W = \{u + A(v) \in V \mid u, v \in X\}$ は X の部分空間であり，かつ $A(W) \subset W$ となることを示せ．

(4) V の次元が奇数ならば，A は 1 を固有値にもつことを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）	令和４年８月実施

[**2**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 実数全体で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の $x > 0$ における導関数を求めよ．

(2) $f(x)$ が実数全体で微分可能か否かを証明付きで述べよ．

(3) $f(x)$ が実数全体で一様連続か否かを証明付きで述べよ．

(B) 集合 D と D 上の関数 $f(x, y)$ をそれぞれ $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
$f(x,y) = e^{-2(x^2+y^2)} \log(1 - e^{-(x^2+y^2)})$ $((x, y) \in D)$ と定める．以下の問に答えよ．

(1) 広義重積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ．

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，広義重積分 $I_\alpha = \displaystyle\iint_D e^{-2(x^2+y^2)} \left|\log(1 - e^{-(x^2+y^2)})\right|^\alpha dxdy$ の収束・発散について調べよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午前）	令和４年８月実施

[**3**] 次の (I), (II) のいずれかの問に答えよ．

(I) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) X, Y を位相空間とする．以下の問に答えよ．

(1) 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続ならば，任意の Y の部分集合 A に対して，

$$f^{-1}(\mathrm{Int}A) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}(A))$$

が成り立つことを示せ．ここで，Int は集合の内部を表す．

(2) 連続関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の部分集合 A で，

$$f^{-1}(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}(f^{-1}(A))$$

を満たさない例を 1 つ与えよ．ただし，$\mathbb{R}$ には通常の位相が入っているとする．

(3) $f : X \longrightarrow Y$ を写像とする．任意の Y の部分集合 A に対して

$$f^{-1}(\mathrm{Int}A) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}(A))$$

が成り立つならば，f は連続であることを示せ．

(B) $\mathbb{C}$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を $\{U \subset \mathbb{C} \mid U^c \text{ は有限集合}\} \cup \{\emptyset\}$ により定める．ただし，U^c は U の $\mathbb{C}$ における補集合を表す．以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{O}$ は開集合の公理を満たすことを示せ．以下，$\mathcal{O}$ により $\mathbb{C}$ に位相を与える．

(2) $\mathbb{C}$ における $\mathbb{Z}$ の閉包 $\overline{\mathbb{Z}}$ を求めよ．

(3) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は連続であり，$\mathbb{Z}$ 上定数であるとする．このとき，f は $\mathbb{C}$ 上定数であることを示せ．

(II) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 自由度 m の t-分布の確率密度関数を $f(t\,|\,m)$ と表す．平均 μ，標準偏差 σ の正規母集団からの独立標本 $X_1, \ldots, X_n$ が観測されたとし，

$$T_0 = \frac{\bar{X}}{\sqrt{S^2/n}}$$

とする．ただし，

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

である．T_0 の実現値を t_0 として，t-検定を行うとする．以下の問に答えよ．

(1) 帰無仮説 $H_0 : \mu = 0$，対立仮説 $H_1 : \mu \neq 0$ とするとき，t-検定の p-値を t_0, n, 確率密度関数 $f(\cdot\,|\,\cdot)$ を用いて表せ．ただし，積分記号を用いてよい．

(2) 帰無仮説 $H_0 : \mu = 1$，対立仮説 $H_1 : \mu > 1$ の t-検定を行う場合, T_0 はどのように修正すべきか．

(3) 帰無仮説を $H_0 : \mu = 0$ とし，有意水準 α で t-検定を行うとき，次の (a), (b), (c) を小さい順に並べ，その理由を書け．

(a) α の値

(b) 対立仮説が $H_2 : \mu > 0$ であり，真の平均が $\mu = 1$ であったときの検出力

(c) 対立仮説が $H_3 : \mu < 0$ であり，真の平均が $\mu = 1$ であったときの検出力

(B) n を正の整数として，次で定義される関数 $f_n(x)$ を考える．

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n^n x^{n-1} e^{-nx}}{(n-1)!} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

以下の問に答えよ．ただし，必要であれば，任意の正の整数 m に対して，

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx = (m-1)!$$

となることを既知の事実として用いてよい．

(1) 関数 $f_n(x)$ は確率密度関数であることを示せ．

(2) 確率変数 X_n が確率密度関数 $f_n(x)$ をもつ確率分布に従うとする．このとき X_n の平均と分散を求めよ．

(3) 確率変数 X_n が確率密度関数 $f_n(x)$ をもつ確率分布に従うとする．チェビシェフの不等式を用いて，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) = 0$$

となることを示せ．