広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和 6 年 1 月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．ただし，n 次実正方行列全体のなす実ベクトル空間を M_n，行列 A の転置行列を ${}^tA$ とし，$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,n}} \in M_n$ に対して $\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ とおく．

(A) V を 3 次交代行列のなす M_3 の部分空間，すなわち

$$V = \{A \in M_3 \mid {}^tA = -A\}$$

とする．また，$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) 連立方程式 $X \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ が解を持つように実数 a の値を定め, その時の一般解を求めよ.

(2) V の次元を答えよ.（答えだけでよい）

(3) $A \in V$ ならば $AX - XA \in V$ であることを示せ.

(4) 線形変換 $f : V \to V$ を $f(A) = AX - XA \ (A \in V)$ で定めるとき，f の固有値のうち実数であるものをすべて求めよ.

(B) $A, B \in M_n$ に対し，$\left[\left[A, B\right]\right] = \operatorname{tr}({}^tAB)$ とおく．

(1) $\left[\left[\cdot, \cdot\right]\right]$ は実ベクトル空間 M_n 上の内積であることを示せ.

(2) W を n 次対称行列のなす M_n の部分空間，すなわち

$$W = \{A \in M_n \mid {}^tA = A\}$$

とする．内積 $\left[\left[\cdot, \cdot\right]\right]$ に関する W の直交補空間 $W^\perp$ の次元を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目	令和6年1月実施

[**2**] 関数 $f : (0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = x \log(\sin x) \qquad (x \in (0, \tfrac{\pi}{2}])$$

により定める. 以下の問に答えよ.

(1) $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で f の導関数 f' を求めよ.

(2) 右極限 $\lim_{x \to +0} f(x)$ を求めよ.

(3) $f'(x) = 0$ を満たす $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ が存在するか否かを答え, その理由を述べよ.

(4) f が $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上で一様連続であるか否かを答え, その理由を述べよ.

(5) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(\tfrac{1}{n})$ の収束・発散を答え, その理由を述べよ.

(6) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(\tfrac{1}{n})$ の収束・発散を答え, その理由を述べよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和 6 年 1 月実施

[**3**] 次の (I), (II) のいずれかの問に答えよ.

(I) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 集合 X を 2 点集合 $X = \{a, b\}$ とする. また, Y を X の位相全体の集合とし, Y 上の関係 $\sim$ を

$$\mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}_2 \iff \text{位相空間 } (X, \mathcal{O}_1) \text{ と } (X, \mathcal{O}_2) \text{ は同相} \qquad (\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in Y)$$

と定める. 以下の問に答えよ.

(1) X の位相, すなわち Y の元を全て列挙せよ.

(2) 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.

(3) 上記の同値関係で割った商集合 $Y/\sim$ の元を全て列挙せよ.

(B) 通常位相を持った $\mathbb{R}^2$ を考える. $S^1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ とし,
$S_U^1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0\}$ とする. 以下の問に答えよ.

(1) S^1, S_U^1 は位相空間 $\mathbb{R}^2$ の開集合であるか否か, また閉集合であるか否か調べよ.

(2) S^1 に位相空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合としての相対位相を入れる. この相対位相に関して S^1 の部分集合 S_U^1 は開集合であるか否か調べよ.

(II) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 関数 $f(x)$ を以下で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}.$$

以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ が確率密度関数となっていることを確かめよ．

(2) 確率変数 X の確率密度関数が $f(x)$ であるとき, $X/2$ の確率密度関数を計算せよ．

(3) 確率変数 X と Y は独立で，同じ確率密度関数 $f(x)$ を持つとする．このとき，$X+(Y/2)$ と $\max(X, Y)$ は同じ確率分布に従うことを示せ．

(B) 三つの確率変数 X_1, X_2, N は独立であるとする．さらに，X_1 と X_2 は同じ確率分布を持ち，$\mathrm{E}(X_1^2) < \infty$ を満たすとする．一方，N は 1 または 2 の値を取るとする．このとき，確率変数

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\mathrm{P}(N = 1) = \theta$ とするとき, 確率変数 N の平均 $\mathrm{E}(N)$ と分散 $\mathrm{Var}(N)$ を計算せよ．

(2) 確率変数 S の平均 $\mathrm{E}(S)$ と分散 $\mathrm{Var}(S)$ について，次の二つの等式を証明せよ：

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(N), \qquad \mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}(N)\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{E}(X_1)^2\mathrm{Var}(N).$$