広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）

受験番号	M

令和５年　８月　２４日　　　９：００ 〜 １２：００

注 意 事 項

１. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙（表紙を含む）	5 枚
解答用紙	3 枚
下書き用紙	3 枚

２. 問題は全部で　3　問ある.

３. 問 [3] では, (I) か (II) かいずれかの問題を選んで解答せよ.

４. 問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ．紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

５. 試験問題の表紙，解答用紙，および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ.

６. 試験終了時には，すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）	令和５年８月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ.

[**1**] ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ を

$$\boldsymbol{u} = (1, -1, 0),\ \boldsymbol{v} = (0, 1, -1),\ \boldsymbol{w} = (-1, 0, 1)$$

と定める. また

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ が一次従属であることを示せ.

(2) V が $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間であることを示せ.

(3) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ が V を張ることを示せ.

(4) V 上の線形変換 f であって, $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$, $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$, $f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ を満たすものが存在しないことを示せ.

(5) V 上の線形変換 g であって, $g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$, $g(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}$, $g(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$ を満たすものを考える. この線形変換 g の固有値をすべて求め, 各固有値に対する固有空間も求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）	令和５年８月実施

[**2**]　次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して $f_n(x) = ne^{-nx}$ と定める. 以下の問に答えよ.

(1) $x > 0$ における極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求め, $\{f_n\}$ は区間 $(0, \infty)$ で一様収束するかどうか調べよ.

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が区間 $[1, \infty)$ で一様収束することを示せ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx$ の値を求めよ.

(B) 以下の問に答えよ.

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$ に対して, 重積分

$$\iint_D e^{(1-y)^2}\, dxdy$$

の値を求めよ.

(2) 曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2x$ で囲まれる図形の体積を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）	令和５年８月実施

[**3**] 次の (I), (II) のいずれかの問に答えよ.

(I) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) X, Y を集合とし, $\mathcal{O}_Y$ を Y 上の位相とする. また, $f : X \to Y$ を写像とし,

$$f^*(\mathcal{O}_Y) = \{f^{-1}(O) \subset X \mid O \in \mathcal{O}_Y\}$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $f^*(\mathcal{O}_Y)$ が X 上の位相であることを示せ.

(2) X 上の位相 $\mathcal{O}_X$ について, 写像 f は位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ から位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像であるとする. このとき $f^*(\mathcal{O}_Y) \subset \mathcal{O}_X$ となることを示せ.

(B) $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, A を Y の部分集合とする. また

$$\mathcal{O}_Y(A) = \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}_Y\}$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\mathcal{O}_Y(A)$ が A 上の位相であることを示せ.

(2) A 上の位相 $\mathcal{O}_A$ について, A から Y への包含写像 ι が位相空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ から位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像であるとする. このとき $\mathcal{O}_Y(A) \subset \mathcal{O}_A$ となることを示せ.

(II) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) $n \geq 1$ を整数とし, $X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立に平均 $\log\theta$ ($\theta > 0$), 分散 1 の正規分布に従う確率変数とし, 尤度関数を

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i \mid \theta)$$

とする. ただし,

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \log\theta)^2}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

である. このとき, 以下の関係式を満たす $\hat{\theta}$ を θ の最尤推定量とする.

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta > 0} L(\theta).$$

また, $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ とする. 以下の問に答えよ.

(1) $\hat{\theta} = \exp(\bar{X})$ を示せ.

(2) $\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量ではないことを示せ.

(B) 以下の問に答えよ.

(1) 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の閉三角形領域 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$$

により定める. 2 次元確率ベクトル (X, Y) は D 上の一様分布に従うとする. 平均 $\mathrm{E}(X)$ と共分散 $\mathrm{Cov}(X, Y)$ を求めよ.

(2) 会社 C で用いられる部品 P は, 二つの工場 A と B で生産される. A で生産された部品 P のうち不良品の割合は $a\%$ であり, B で生産された部品 P のうち不良品の割合は $b\%$ である. また, 部品 P が不良品であるとき, それが A で生産された確率は $q \in (0, 1)$ である. 会社 C において, A で生産された部品 P の割合を求めよ.