音の波と三角関数

小林　亮

広島大学大学院理学研究科

1　音について

1.1　音の波

私たちは日々、会話や音楽や騒音など、さまざまな音に囲まれて生活しています。音を聴くということがあまりに日常的でありふれたことなので、逆に音について深く考える機会はめったにないのではないでしょうか。今回の講演では、この音というものについて皆さんと一緒にいろいろと考えてみたいと思います。

音が空気を伝わる波であるということはご存知だと思います。まず、音源が振動することにより周辺の空気を押したり引いたりして、その結果周辺の空気に疎密が生じます。その疎密は空気中を波として伝わっていきます（図 1(a)）。音の波が空気中を伝わって行くとき、媒質である空気自身は波の進行方向に平行な方向に振動しますが、このような波は縦波と呼ばれます。

空気が密になれば圧力が上がり、粗になれば下がるわけですから、音とは伝搬する空気圧の波であると言えます。空気の圧力変動を、適当な位置で計測すると図 1(b) のようなグラフが得られます。大気圧を基準として、そこからの圧力変動のことを音圧と呼びます。大気圧は約 1000 hPa (ヘクトパスカル) $= 100,000$ Pa ですが、私たちが普段耳にする音

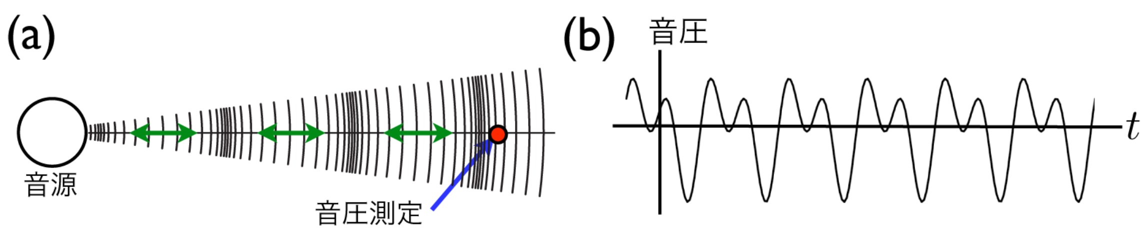


図 1: (a) 音の伝わる様子　 (b) 音圧曲線

の音圧はどの程度のものなのでしょう。例えば、普通に会話しているときの音圧はたった

の 0.002 Pa （大気圧の 5000 万分の１！）です。意外に小さなものですね。
　さて、音には３つの重要な属性があります。それは「大きさ」と「高さ」と「音色」です。以下では、それぞれについて簡単に説明をします。

1.2　音の大きさ

　音圧が大きいほど音は大きく聞こえるのですが、音圧の大きさと音の大きさを感じる感覚の間の関係はどうなっているのでしょう。ここに「ウェーバー・フェヒナーの法則」と呼ばれる、刺激強度と感覚強度を関係づけるおもしろい法則があります。

「感覚をある量（知覚される量）だけ増加させるのに必要な
刺激の増加量はすでに存在する刺激量に比例する」

この法則は、音の大きさに関して言うと次のようになります。静かな音と大きな音の２通りの音を考えます。仮に静かな方の音圧を 1 として、大きな方の音の音圧を 100 としましょう。静かな音を聞きながら音圧を 0.1 だけ上げて 1.1 にすると、私たちは何がしか音が大きくなったという感覚を持ちます。次に、大きな方の音を聴いているときに、小さい音のときと同じだけ音が大きくなったという感覚を得ようとすると、音圧を 0.1 だけ上げてもだめで 10 上げて 110 にしなくてはならない、というのがこの法則の言わんとすることです。要は、２つの刺激に対する感覚強度の差は、刺激強度の差に比例するのではなく、比に比例しているというわけです。私たちのすべての感覚が正確にこの法則に従っているというわけではありませんが、おおまかに言えばこの法則はよく成立しているように思えます。確かに、我々が 1 億円の宝くじに当たったときの喜びの度合いと、アラブの大富豪が同じ 1 億円当たったときの喜びの度合いは全然違うはずですしね（喜ばないかも）。
　さて、このような関係を表現するには、対数を用いるのが便利です。具体的には、音圧のレベルを表現するのに dB（デシベル）という単位を用います。最小可聴音の音圧 $a = 0.00002$ Pa を 0 dB として、音圧が 10 倍になるごとに 20 dB 増えるようにするというものです。音圧が 100 倍だと 40 dB、1000 倍だと 60 dB といった調子です。式で書けば x Pa の音圧を $20 \log_{10} \dfrac{x}{a}$ dB で表すことになります。最大可聴音圧は 120 dB と言われていますので、これは何と最小可聴音圧の 100 万倍ということになり、人間の耳というのは非常に広範囲の音圧レベルをカバーしている実に優秀なセンサーだということがわかります。

	音圧 (単位 Pa)	音圧 (単位 dB)
最小可聴音	0.00002	0
ささやき声 (1m)	0.0002	20
会話 (1m)	0.002	60
街の雑踏	0.2	80
地下鉄内	0.5	90
ジェットエンジン (50m)	20	120

1.3 音の高さ

音の高低は、空気の振動の速さに関係しています。振動の速さは 1 秒間に何回振動するかを示す「周波数」によって表され、Hz（ヘルツ）という単位を用います。低い音は周波数が低く、高い音は周波数が高いということが知られています。私たち人間が聞くことのできる音の範囲は、およそ 20Hz から 20kHz (20,000Hz) までで、この範囲より低い音は超低周波音と呼ばれ、逆に高い方は超音波と呼ばれます。超低周波音については、最近では騒音公害との兼ね合いで耳にすることが多いと思います。超音波の方は、これはもうご存知のように、医療から魚群探知、自動ドアのセンサー、眼鏡の洗浄など、世の中のあらゆるところで利用されています。

人	犬	猫	イルカ	コウモリ
20Hz〜20kHz	15Hz〜50kHz	60Hz〜65kHz	150Hz〜150kHz	1kHz〜120kHz

可聴周波数の範囲は上の表にあるように動物によって違っていて、犬や猫は私たちが聞こえない超音波が聞こえているようです。（犬笛は聞いたことあるけど、猫笛って聞いたことありません。吹いても何もしないからでしょうね。）

ウェーバー・フェヒナーの法則のところで、感覚強度と刺激強度はだいたい対数関係にあるということを述べました。実は、音の高さの感覚（これをピッチと呼びます）と周波数の関係は、非常にきれいに対数関係で結ばれています。たとえば、私たちはオクターブという音程の感覚を持っていますが、音の高さがオクターブ上がるごとに、周波数は倍々になっていきます。よく弦楽器のチューニングに用いる A 音（ラ）の周波数は 440 Hz ですが、その音のオクターブ上の A 音は 880 Hz，さらにそのオクターブ上の A 音は 1760 Hz ということになります（1320 Hz ではありません！）。逆にオクターブ下の A 音は 220 Hz です。このことは、音程は周波数の差でなく周波数の比によって決まるということを意味しています。

余談を少し：私たちは CD を聴いて音楽を楽しんでいますが、現在の CD の規格では 22 kHz より高い周波数の音はカットされています。1970 年代にこの規格を決めるときに

何度もブラインドテストをして、16 kHz あたりから上の周波数の音を加えようが加えまいが、人はほとんど差を知覚できないという結果が得られたそうです。それで 22 kHz まで対応しておけば（横で聞いているペットたちは不満かもしれませんが）十分であるということになっています。実際、CD を聞いていて、高音域に物足りなさを感じるということは（少なくとも私は）ありません。ただ、この話には異論もあります。超音波ははっきりと知覚はできなくとも、音の印象に影響を与えるという意見はオーディオマニアの間に根強くあるようです。また、22 kHz より上の周波数帯の超音波をふんだんに含んだインドネシアのガムラン音楽を聞くと、脳からアルファ波が出るという研究結果もあります。聴こえない超低周波音が健康に害をなすことがあるのなら、聴こえない超音波に癒されることがあってもいいような気もします。

1.4 音の音色

大きさや高さが同じであったとしても、私たちはいろいろな楽器の音や人の声を聞き分けることができます。これが音色の違いというものです。ここで、実際の音の波形を見てみることにしましょう（図２）。これを見ていると、各楽器の音色の違いは波形の違いに

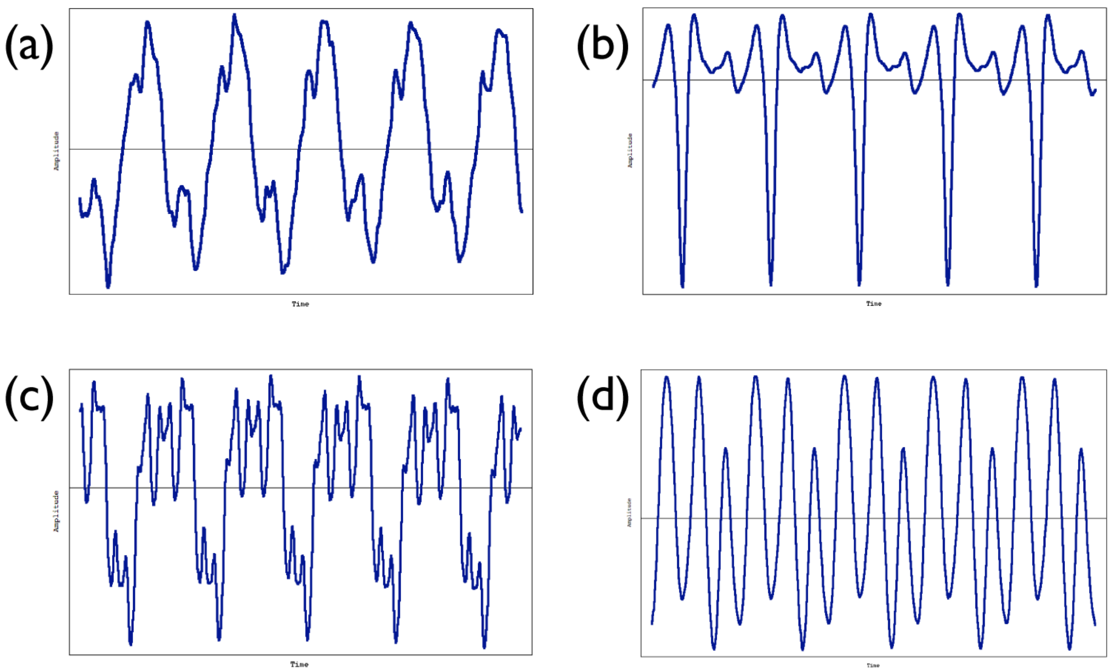


図 2: 波形のグラフ (a) ピアノ (b) トランペット (c) オルガン (d) クラリネット

関係しているだろうということがわかります。このように音の波形はバラエティに富んだ

ものです。波形を漫然と眺めていただけでは、その波の性質を調べたり、また積極的に加工したりすることはできません。そのためには、波をどのように表現するかということが問題になります。そこで表題にある「三角関数」の出番になるというわけです。

2　三角関数

2.1　サインとコサイン

三角関数、特にサインとコサインはいろいろな波を表現するための必須アイテムです。多分皆さん、三角関数の定義をお忘れと思いますので、まずはそこから始めましょう。三角関数というぐらいですから、三角形を使った定義が元にあるのですが、ここでは円を使ってもっとスマートな定義をします。その前に三角関数を使うときの角度の単位について言っておかなくてはなりません。「直角は 90°で 1 回転は 360°」というように、角の単位としては°(度)に慣れておられる方が多いと思いますが、三角関数を使うときは、通常角度の単位としてラジアンという単位を用います。この単位での角度の測り方について説明しておきましょう。ます、図 3 (a) のように原点を中心とする半径 1 の円を考えます。点 P はいつもこの円周上を動く点だと思ってください。点 P が 点 $A(1,0)$ から出発して、この円の円周に沿って反時計回りに θ という距離だけ移動したとします。このときの OP と OA のなす角を θ ラジアンと定義します。半径 1 の円の円周は 2π ですから (円周 $= 2\pi\times$ 半径 という公式を思い出して下さい) 360°は 2π ラジアンとなります。ということは 180°は π ラジアン、90°は $\dfrac{\pi}{2}$ ラジアンですね。必ずしも 0 から 2π の数値しか角度を表せないというわけではありません。θ が 2π より大きい場合には 1 周以上回ることを意味しますし、θ が負の場合には時計回りに回ることになります。

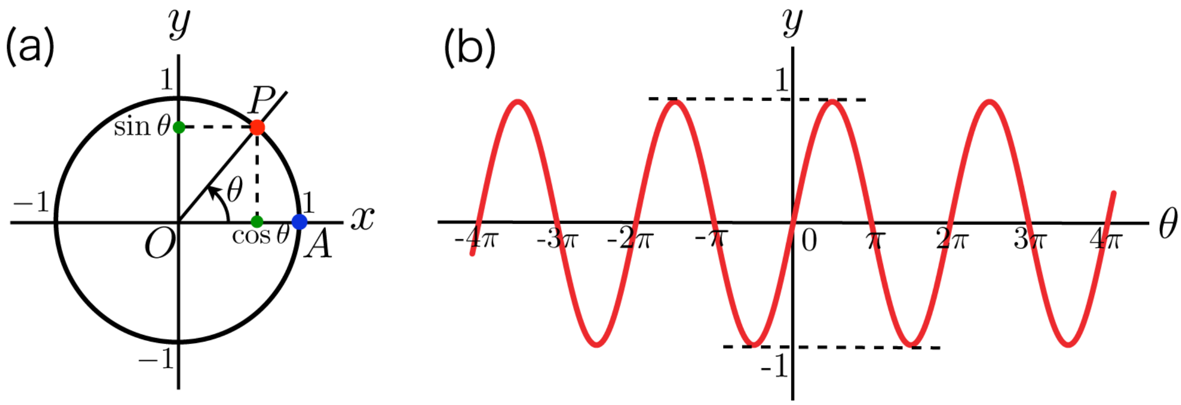


図 3: (a) $\sin\theta$, $\cos\theta$ の定義　　(b) $y = \sin\theta$ のグラフ

次に三角関数の代表選手である sin と cos の定義をします。ラジアンの説明で出てきた点 P (この点は点 A から円周に沿って θ だけ移動して図の位置にいます）の x 座標を $\cos\theta$, y 座標を $\sin\theta$ と定義するのです。えらくあっさりした定義でしょう。

2.2 正弦波

さて以下では三角関数を使って波を表現するのですが、 サインもコサインもほとんど似た者同士ですので、もっぱらサインの方を使うことにします。まず図 3(a) における点 P が、円周上を一定のスピードでビュンビュン回っているところを想像してください。1 秒間に f 周するということにしますと、点 P は 1 秒間に角度にして $2\pi f$ ラジアン回ります。この点 P が時刻 0 に点 A を出発したとしますと、時刻 t では角度 $2\pi ft$ だけ回ったことになります。点 P が円周上を 1 周するのにかかる時間は $1/f$ ですから、明らかに点 P の運動は周期 $T = 1/f$ を持つ周期運動です。このとき時刻 t に対し、点 P の y 座標を対応させる関数 $y = \sin 2\pi ft$ を考えると、これは同じ周期 $T = 1/f$ を持つ周期関数になります。ここでいう周期運動とか周期関数というのは、周期 T ごとに同じことを繰り返す運動とか関数という意味です。

さて出発点を点 A にとっていましたが、出発点を円周上の ϕ ラジアンの点にとれば $y = \sin(2\pi ft + \phi)$ の形になります（この ϕ を初期位相といいます）。この波の振幅は 1 ですが、一般の振幅の波も表せるように a 倍してやりますと $y = a\sin(2\pi ft + \phi)$ という式が得られます。図 4 はこの式のグラフですが、このような波のことを正弦波と呼びます。もう少し正確に言うと、振幅 a, 周波数 f, 周期 T, 初期位相 ϕ を持つ正弦波です。もちろん、周波数 f と周期 T は常に逆数の関係にあります。この正弦波はいろいろな波の中で、最も単純で基本的な波の形です。

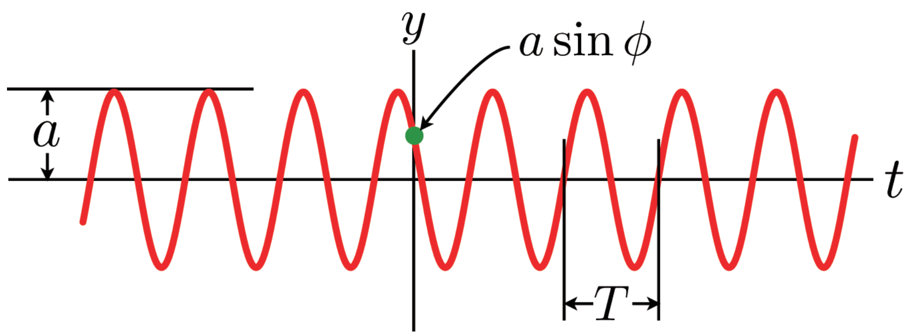


図 4: 正弦波 $y = a\sin(2\pi ft + \phi)$ のグラフ　$T = 1/f$

ここで、この正弦波を波形として持つ音がどんな音なのか、という疑問を持たれるかも

しれませんね。それは純音と呼ばれるものですが、講演のときにお聞かせすることにします。

3　周期関数とフーリエ級数

3.1　楽音と非楽音

さて、ここまでは「音の高さ」という言葉を何気なく用いてきましたが、私たちが耳にする音のすべてが、はっきりとした高さを持っているのでしょうか。確かに、ピアノの真ん中のドの音を弾いたときに出る音は、はっきりとした高さを持っていると言って良さそうです。ギターの第5弦を弾いたときに出る音も同じです。それに対して、風の音や足音、自動車のエンジンの音などはどうでしょう。また楽器の中でも、ドラムはどうでしょうか。確かにこれらの音にも高い低いの違いはありますが、はっきりとした高さを言うこと（例えば ピアノのどの鍵盤に対応しているかを言うこと）は通常できません。以下では、はっきりした高さを持つ音を楽音、そうでない音を非楽音と呼ぶことにします。

楽音には際立った特徴があります。それは波が周期的であるということです。図5の (a) はバイオリンの波形です。これは周期的ですね。一方 (b) はクラッシュシンバルの波形ですが、これには周期性が認められません。

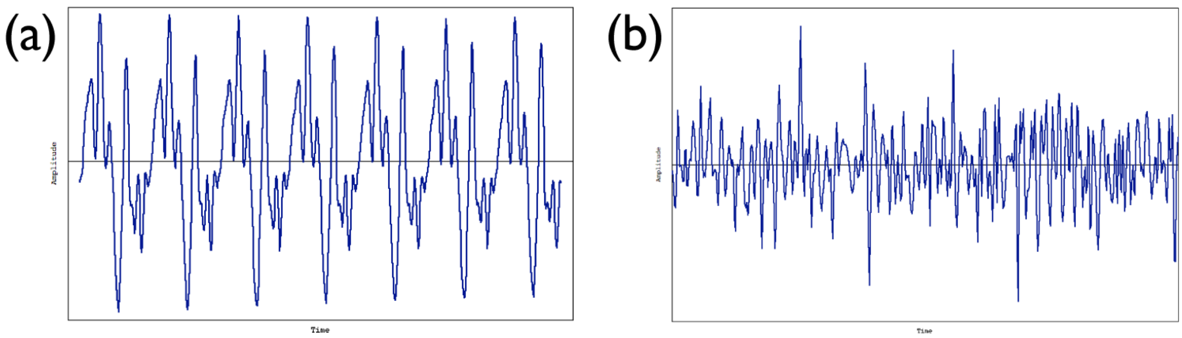


図 5: (a) 楽音の波形　(b) 非楽音の波形

3.2　フーリエ級数

以下では、楽音すなわち周期的な波で表される音について考えていくことにします。まず、周波数が f の正弦波 $\sin 2\pi ft$ を考えてみましょう。もちろんこの波は周期 $T = 1/f$ を持ちます。ここで、周波数が $2f, 3f, 4f, \cdots$ といったちょうど周波数がもとの周波数の整

数倍になっているような正弦波を考えます。このような正弦波は n を整数として $\sin 2\pi nft$ と書くことができます。この波は周波数が nf である訳ですから、周期は $1/(nf)$ です。すなわち、もとの波の周期の $1/n$ の周期を持つことになります。このことから、この正弦波は同時に周期 T を持つことがわかります。(T の間に n 周期分回って元に戻って来るからです)

ここでこの波の振幅を増幅し、さらに位相のずれを入れた正弦波 $a_n \sin(2\pi nft + \phi_n)$ を考えても、やはりこの波は周期 $1/(nf)$ の波であり、それゆえ周期 $T = 1/f$ を持つことも明らかです。これで私たちは周期 T を持つ正弦波のコレクションをいっぱい（無限個）手に入れたことになります。このコレクションを並べてみましょう。

$$a_1 \sin(2\pi ft + \phi_1),\ a_2 \sin(4\pi ft + \phi_2),\ \cdots,\ a_n \sin(2\pi nft + \phi_n),\ \cdots$$

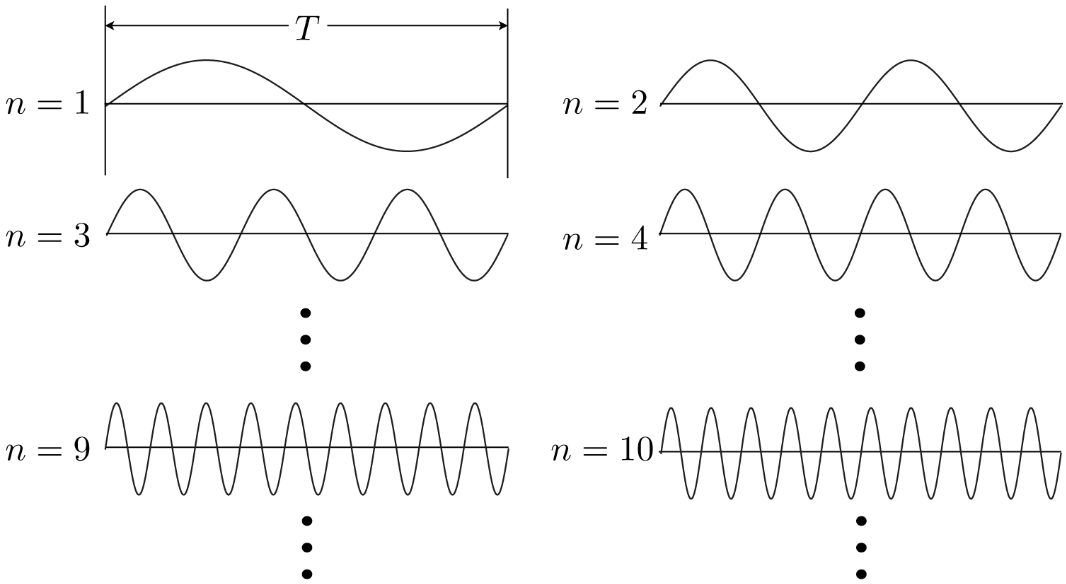


図 6: 周期 T を持つ正弦波のコレクション。この図ではすべての n について $a_n = 1$, $\phi_n = 0$ としている。

ここでこの無限個のコレクションに、定数 a_0 も加えて、エイヤっと足し合わせてみますと、

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \sin(2\pi ft + \phi_1) &+ a_2 \sin(4\pi ft + \phi_2) + \cdots \\ \cdots &+ a_n \sin(2\pi nft + \phi_n) + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

という式が得られます。「無限個なんて足しても大丈夫かいな」と思われるかもしれませんが、無限と言っても実質的には 十分先の n に対しては a_n を非常に小さくとるので、せ

いぜい 100 個ぐらい足していると思っておいてください。(無限の意味にこだわるのは数学者の仕事の一つですが、皆さんはここでこだわる必要はありません)

式 (1) は「フーリエ級数」と呼ばれています。この名前はナポレオンの時代に活躍したフランスの数学者ジョゼフ・フーリエにちなんでいます。式 (1) に含まれる各項はすべて周期 $T = 1/f$ を持つので、式 (1) で表される関数が同じ周期 T を持つというのは、まあ当たり前のことです。ところがフーリエは、次のようなことを主張したのです。

「周期 $T = 1/f$ を持つ任意の周期関数は式 (1) の形で表すことができる」

当時の数学者はこの主張に対し懐疑的でしたが、フーリエの主張は完全に本質を衝いていたので、徐々に受け入れられ（「任意の」のところは多少制限を受けましたが)、またその受け入れられる過程でなされた研究が、多いに数学を進歩させるというおまけまでついたのです。

ともあれ、このフーリエの主張が音の波にとって何を意味しているかを考えてみましょう。楽音は周期的な波で表されるということを思い出してください。フーリエによれば、周期的な波は式 (1) の形に書けるわけですから、言葉を変えて言うと、

「楽音は基準音とその倍音に分解できる。」

ということになります。ここで、基準音とは $n = 1$ に対応する最も小さい周波数（式 (1) では f）を持つ正弦波によって表されるの音のことで、倍音とは基準音の周波数の整数倍の周波数を持つ正弦波によって表されるの音のことです。特に周波数 nf を持つ倍音を第 n 倍音と呼びます。定数 a_0 は大気圧に相当していて、音すなわち音圧変化には直接関係しませんので、ここでは無視してもかまいません。

例として、図 7 (a) のようなカクカクした波形を持つ音（矩形波といいます）を正弦波に分解してみますと、次のように奇数次の倍音のみを持つことが計算によってわかります。

$$\frac{1}{1}\sin 2\pi ft + \frac{1}{3}\sin 6\pi ft + \frac{1}{5}\sin 10\pi ft + \frac{1}{7}\sin 14\pi ft + \cdots$$

図 7 (b)-(d) には、上の分解に従って、有限個の倍音で合成した波形を書いてあります。倍音の数を増やしていくと、どんどん矩形波に近づいて行くのが見てとれます。

3.3　スペクトル

各係数 a_n は第 n 倍音がどれぐらい多く含まれているかを示す尺度です。周波数を横軸にとって、周波数 nf のところに a_n を棒グラフに書いたものを「スペクトル」といいま

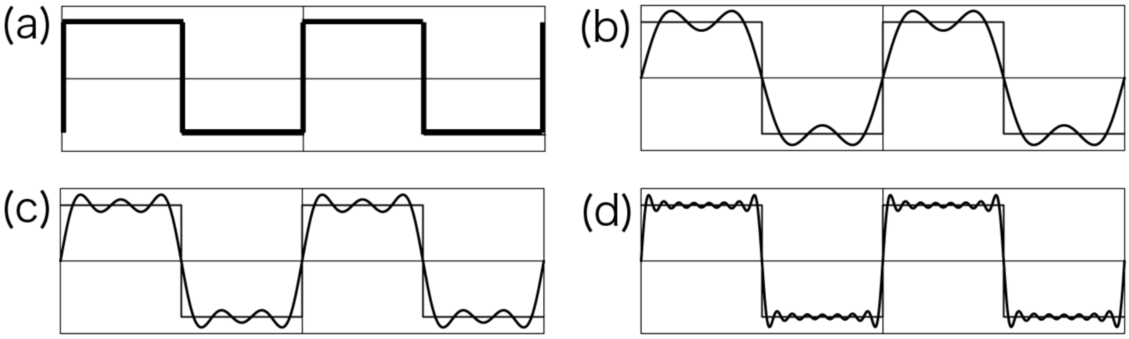


図 7: (a) 矩形波の波形　(b) 第 3 倍音までの合成波形　(c) 第 5 倍音までの合成波形　(d) 第 15 倍音までの合成波形

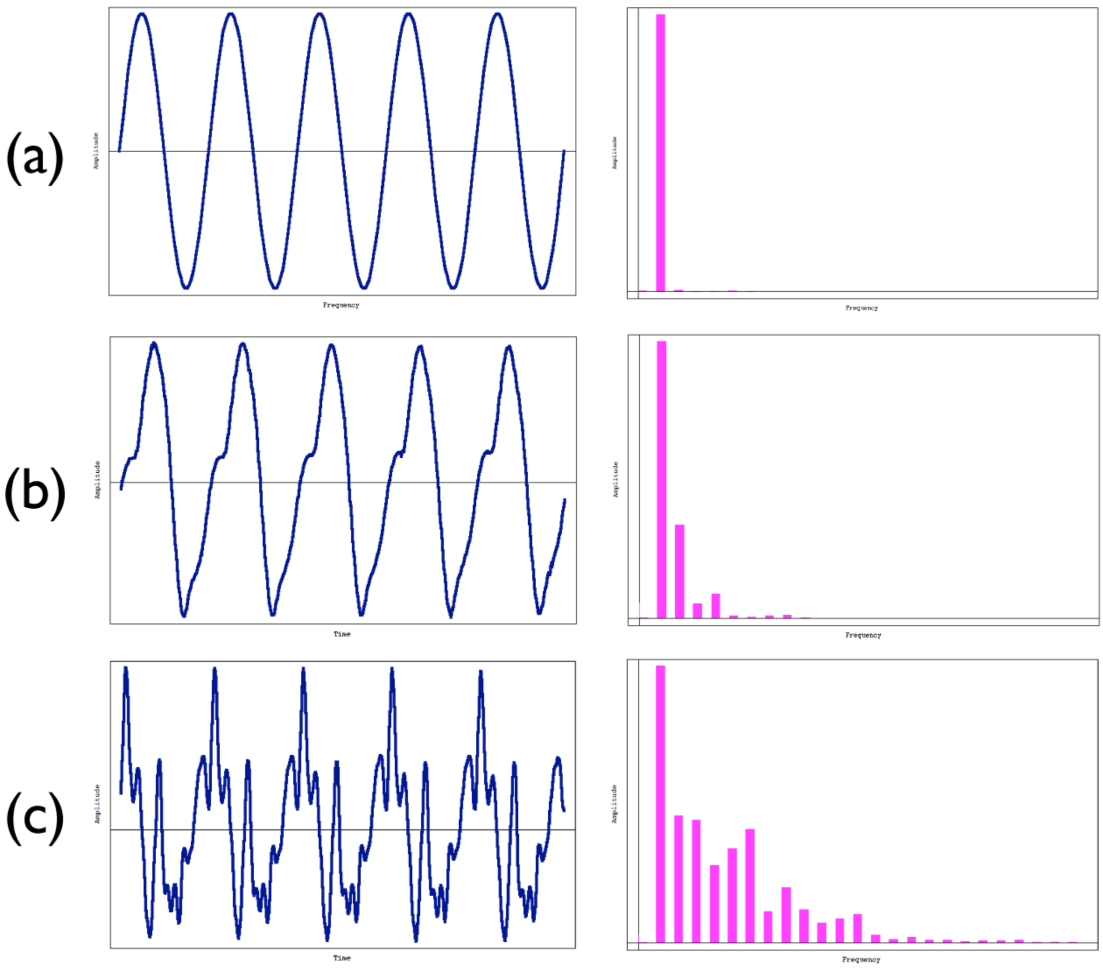


図 8: 左は 440Hz の音の波形、右はそれぞれのスペクトル　(a) 純音（音叉）　(b) フルート　(c) バイオリン

す。これは基準音と倍音の混じり具合を一目で見られるようにしたもので、音に限らず様々な振動の特性を一目でつかむことができるのでよく利用されています。

いくつかの例を見てみましょう。一番単純な場合は、純音（正弦波）です。その周波数を f としますと、図8 (a) のように、スペクトルは f のところに1本の線が立っているだけです。純音は基準音のみからなる音だから当然ですね。一般の楽音（周期 T の周期波形）に関しては、基準音とその倍音の周波数のところにのみ線が立ちます。通常、基準音の周波数 $f = 1/T$ がこの楽音の高さ（ピッチ）を決めています。スペクトルを見れば、ピッチだけでなく、その楽音がどの倍音成分を豊富に含んでいるかというような情報が一目で分かります。フルートのように波形がなだらかに変化している場合は、高周波の倍音をほとんど含んでいません（図8 (b)）。一方、バイオリンのように波形が複雑に入り組んだものであれば、高周波の倍音を多く含むということになります（図8 (c)）。これは切り立ったギザギザ波形を現すには、高周波の波が必要であるからです。

このように周期波形を正弦波に分解する手法というのは、「複雑なものを、よく知っている単純なものに分解して、その組み合わせとして理解する」という科学の方法論の典型的なパターンです。「一見複雑に見える波形も、扱いやすい正弦波の組み合わせにしてしまえばよくわかる」というわけですね。このように、現象を波の重ね合わせとして解析する手法はフーリエ解析と呼ばれ、現代の科学技術を支える大きな柱となっています。フーリエ解析というものがなければ、明日にでも飯の食い上げになってしまう科学者や技術者が数えきれないぐらいいる、というぐらい世のため人のためお役に立っています。

4　音のエンベロープ

前章で述べた周波数分析は、音を解析する際の強力な道具ではありますが、この道具では見えない重要な要素があります。音楽において演奏される音を考えてみましょう。音楽における1音の典型的な長さは0.1秒から数秒のオーダーです。実際に奏でられる音には初めと終わりがあるわけですから、当然のことながらこの音の波形は正弦波やフーリエ級数で表されるような理想的な周期波形というわけにはいきません（周期波形というのは永遠に同じことを繰り返す波の形ですから）。例えば440Hzの音を1秒間鳴らす場合、1周期分の波形を440回繰り返して終わってしまいます。スペクトルを求めるときには、この点に目をつぶって、1周期分の波形を取り出してきて、それが永遠に繰り返されると仮定して、各周波数の成分を決めているわけです。このようにしますと、当然失われる情報が出てきます。

具体的な楽器を例にとって考えてみましょう。ピアノやギターでは、弦をハンマーでた

たいたり指で弾いたりして音を出します。これらの楽器では、弦の振動は初めが一番振幅が大きく、ただちに減衰していきます。それに対し、オルガンや管楽器、バイオリンのように弓で弾く弦楽器等では、減衰しない音を出すことができます。図 9 は実際の楽器が数秒間音を出すときの波形を、音の出初めから音が消えるまでの間で示したものです。ですから、時間軸のスケールが秒のオーダーになっていて（1 周期分の波形を書く場合は時間軸のスケールはミリ秒のオーダー）、波形はべったり塗りつぶしたように見えています。波の山の部分をつないで得られる曲線（図 9 では輪郭線に見えている） は振幅の時間変化を示しており、エンベロープ（包絡線）と呼ばれます。

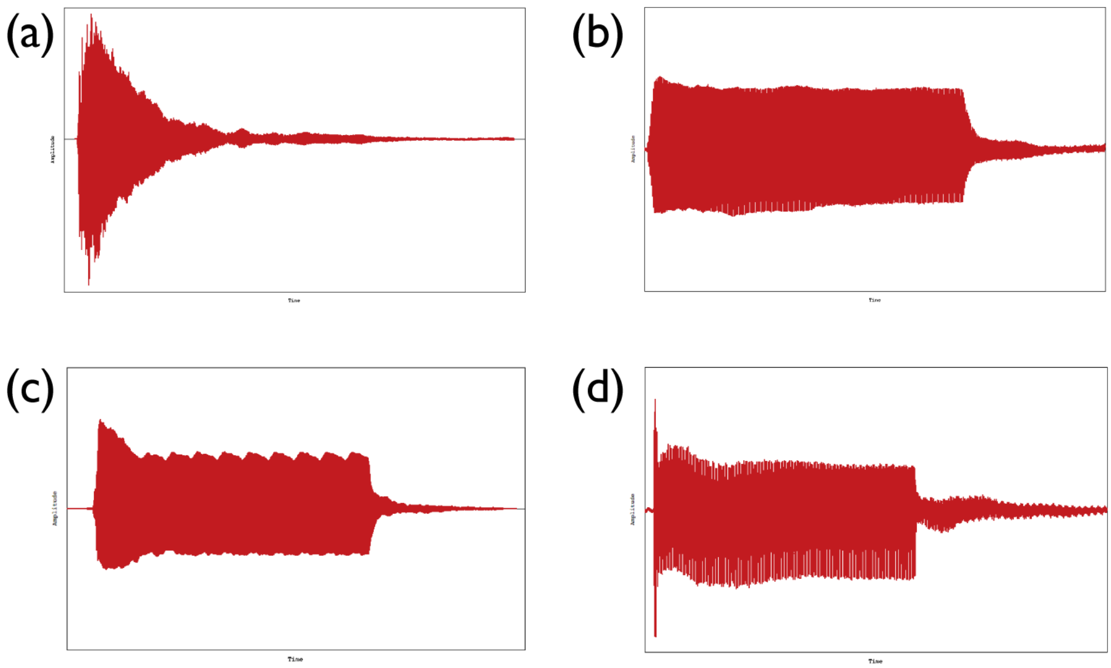


図 9: 発音開始から終了までの波形変化　(a) ピアノ　(b) クラリネット　(c) バイオリン　(d) オルガン

実は、我々が楽器の音を聴いて「これはピアノ」「これはフルート」というように区別をする際には、音色だけではなくこのエンベロープの情報をかなり使っているのです。とりわけ、音の立ち上がり部分（これをアタックといいます）が大事であることが知られています。このことに関しては、講演会場で実験をする予定です。

5　ハーモニー

5.1　音がハモるとは？

ご存知のように、音楽には和音というものがあります。複数の音が同時に奏でられることによって、心地よい響きを作り出すものです。もちろん、でたらめにいくつかのピアノの鍵盤を押さえても、和音と呼ぶにふさわしいものが得られるとは限りません。明らかに、音の組み合わせの中には、同時に鳴ったときに心地よく響くものと、そうでないものがあります。

ここでは話を簡単にするために、２つの音の組み合わせを考えてみることにしましょう。次のような、単純ではありますが、興味深い実験を考えることができます。基準音になるある一つの音を、何かの楽器で継続的に鳴らしておきます。もう一つの音を同じ楽器で、基準音からその１オクターブ上の音まで、周波数をゆっくりと連続的に変化させながら鳴らします。そして、周波数ごとに心地よさの度合い（あるいは耳障りの程度）を記録していくのです。もちろん、心地よく響くとか耳障りであるとかいうのは、多分に主観的なものなので、多少の個人差はあるはずです。しかし、明らかにある条件が満たされたときに、ほとんどの人がハモっていると思う周波数がいくつかあります。実はそのような周波数というのは、基準音の周波数との比が単純な整数比になっている場合なのです。ユニゾン（同音）の場合は周波数比は 1，オクターブの音程では周波数比は 2 となります。これらはもっともよくハモっている（面白みはありませんが）場合です。次によくハモっているのは、５度の音程で周波数比は $\dfrac{3}{2}$ で、以下４度が $\dfrac{4}{3}$，長３度が $\dfrac{5}{4}$ です。

5.2　うなり

ハーモニーとは少し外れますが、２つの音が同時に鳴っていて、その周波数が少しだけ違う場合を考えてみましょう。このような場合、楽器のチューニングをしたことがある方ならご承知のように、「うなり」という現象が生じます。音の大きさがゆっくりと大きくなったり小さくなったりする現象です。「うなり」は三角関数の公式（なかなか覚えきれないものの一つですが）を使うと、以下のように説明することができます。２つの音の周波数を f_1 と f_2 として、２つの音の波の合成 $y = \sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi f_2 t$ を計算してみましょう。公式 $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ を使うと

$$y = 2\sin 2\pi f t\ \cos\pi f' t \qquad \text{ただし}\ \ f = \frac{f_1+f_2}{2},\ \ f' = f_1 - f_2$$

２つの周波数が近いので f' は小さな周波数（例えば 2〜3 Hz 程度）となり、これがゆったりとした音量のうねりを作り出します（図 10)。この波形、２つの音の平均周波数 f の高さの音がゆっくりと大きくなったり小さくなったりするように聴こえます。

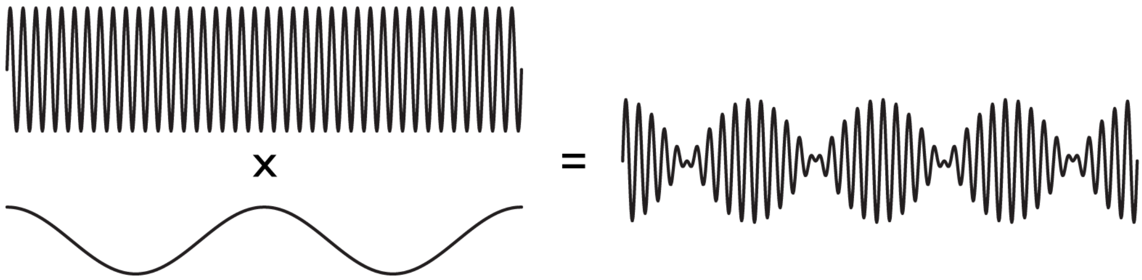


図 10: 左上は平均周波数 f を持つ正弦波で、この波形を左下のゆっくりとした正弦波で振幅変調したものが、右のうなりの波形である。

5.3　純正律 vs. 平均律

最後に音階（いわゆるドレミファソラシドの西洋音階）の話を一つ。先ほどの話からすると、きれいなハーモニーを得るためには音階の構成音の周波数比が単純な整数比になっていることが必要なはずです。ドの周波数を 1 としたとき、５度上のソの周波数は $\frac{3}{2}$ になっているはずですね。ファは $\frac{4}{3}$、ミは $\frac{5}{4}$ でなくてはいけません。これをシステマティックな方法でやってみましょう。まず、基準音（ド)、基準音より５度高い音（ソ)、５度低い音（低いファ）の３音を用意します。基準音の周波数を 1 としますと、高い方の音の周波数は $\frac{3}{2}$ で、低い方は $\frac{2}{3}$ となります。次に、これらの音の第５倍音までを考えますと

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \qquad \frac{3}{2},\ 3,\ \frac{9}{2},\ 6,\ \frac{15}{2} \qquad \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 2,\ \frac{8}{3},\ \frac{10}{3}$$

という 15 の周波数が得られます（重なっているものもありますが)。これを 1 オクターブ（周波数が 1 から 2 の間）におさまるまで、2 をかけたり（オクターブアップ)、2 で割ったり（オクターブダウン）しますと、

$$1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{4} \qquad \frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{8},\ \frac{3}{2},\ \frac{15}{8} \qquad \frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ 2,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3}$$

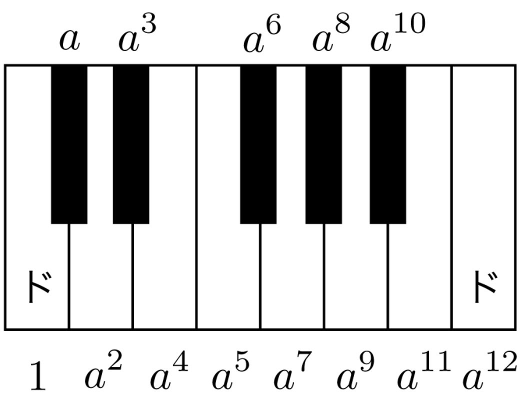
が得られます。相異なるものを小さい方から並べると

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{15}{8} \quad 2$$

これで、ドレミファソラシドの一丁上がりです。この音階は純正律音階（ツァルリーノ音階）と呼ばれ、音階内の多くの和音が美しく響きます。特に長調の主要３和音のドミソ、ファラド、ソシレの周波数比はいずれも $4:5:6$ でグーです。

ではピアノはこのようにチューニングされているのでしょうか？　実は、現在のピアノの音階はこうはなっていないのです。この音階、ハ長調の曲しか弾かないとすれば不都合はないのですが、ではニ長調の曲を弾こうとするとどうでしょう。例えば、ドとソの周波数比が $\frac{3}{2}$ なのに対し、レとラの周波数比を計算しますと $\frac{5/3}{9/8} = \frac{40}{27}$ ですから、単純な整数比になっていません。これでは二長調の主和音は濁った響きになってしまいます。（これは、純正律音階において全音音程が２通りあることに起因しています。実際、ドとレ・ファとソ・ラとシの周波数比は $\frac{9}{8}$ ですが、レとミ・ソとラの周波数比は $\frac{10}{9}$ になっているのを確認してください。）このように、純正律音階は移調すると美しい響きが失われるという大きな欠点があるということがわかります。別の言い方をすれば、すべての調で単純な整数比できれいにハモるようにしようと思うと、音階の中にたくさんの微妙に周波数の違う音を準備することが必要になるということです。これは楽器を作る上でも、演奏する上でもあまり現実的ではありません。

そこで登場するのが平均律と呼ばれる音階です。この音階はピッチと周波数の対数関係を非常に律儀に守ったものと言えます。すなわち１オクターブの中に含まれる 12 個の半音程をすべて等しいと置くことによって、この平均律という音階は成立しています。音程は周波数比に対応していたので、これは半音程で並べた音の周波数を等比数列にとるということに他なりません。ドの周波数を 1 として等比数列の公比を a としますと、各音の周波数は下図のようになりますが、オクターブ上のドの周波数は 2 であるべきなので $a^{12} = 2$ です。これから $a = 2^{1/12} = 1.059463$ となります。この $2^{1/12}$ という数は残念な



がら無理数なので、オクターブ以外の音程に対応する周波数比はすべて整数比ではないということになってしまいます。それゆえ平均律ではどうしても純正律の和音のようなきれ

いな響きは得られません。そのかわりに移調は自由にできるという利点があります。そういう意味で、平均律音階はある種の妥協の産物であると言えるでしょう。

音階の構成音の周波数を純正律音階と平均律で比較してみますと

	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
純正律	1.000	1.125	1.250	1.333	1.500	1.667	1.875	2.000
平均律	1.000	1.122	1.260	1.335	1.498	1.682	1.888	2.000

のようになります。それぞれのソの周波数はかなり近くてほとんど区別がつかないのですが、ミの周波数では 1 % 近い違いがあり、耳のいい人にははっきりと違いがわかるようです（かなり個人差あり）。

「純正律 vs. 平均律」については、現在もいろいろな人がいろいろなことを言っており、「純正律は世界を救う」などという本も出ています。モーツァルトも平均律を嫌っていたそうですし、エンヤの曲は純正律だから癒されるという話もあります。とはいえプロの調律師に聞いた話では、現在では 99.9% ピアノの調律は平均律で行っているとのことです。確かに、調の違う曲のためにステージにピアノを何台も用意するというのは、ちょっと現実的には厳しいでしょうから。この件に興味のある人はインターネット等で調べてみてください。いっぱい出てきますよ。

参考文献

[1] チャールズ・テイラー, 音の不思議を探る, 大月書店 (1998)

[2] ジョン・R・ピアーズ, 音楽の科学, 日経サイエンス社 (1989)

[3] アーサー・H・ベナード, 音と楽器, 河出書房新社 (1971)

[4] アレクサンダー・ウッド, 音楽の物理学, 音楽之友社 (1976)

[5] 中村健太郎, 図解雑学 音のしくみ, ナツメ社 (1999)