●関孝和の数学

消去法と行列式

松本堯生

これから紹介する和算の本の大半は東北大学の和算ポータルで見ることができます．また，天元術などについては多くのインターネットのサイトでも解説があります．

関孝和が生前刊行した本は『発微算法』(延宝2年＝1674刊)唯1つのようです．この本は沢口一之の『古今算法記』(1670序跋，寛文11年＝1671？刊)の遺題(＝好)15問を解いたものです．江戸時代のベストセラーであった吉田光由の『塵劫記』(寛永4年＝1627初版？)には大きさ・内容・色摺りの有無も込めていろんな版があるのですが，その中でも「数学を教える人はこのくらいの問題は解けなくては」という12問を最後に付けた遺題本『新篇塵劫記』(寛永18年＝1641刊)が和算では特別な役割を果たしました．この塵劫記の遺題に解答をつけて最初に刊行したのは『参両録』下巻(1653)とされていますが，参両録も遺題8問を出しました．このように，前の書物の問題解答に新しい問題を付けて刊行することを遺題継承と言い，和算が流行し発展するひとつの契機を与えました．遺題本塵劫記(1641)—算法闕疑抄4・5巻(1659)—童介抄(1664)—算法根源記(1669)—古今算法記4〜7巻(1671)—発微算法(1674)の系列が有名です．算法闕疑抄と童介抄はそれぞれ100問，算法根源記はこれら200問を解き遺題150問を出しています．

算法根源記の問題は方程式を立てて解かなければ難しく，古今算法記の著者沢口は1変数の方程式を作りそれを解く方法(＝天元術)を理解し，天元術を用いて30日未満で全問(円理の16問を除く)を解いたと，門人の佐藤茂春が算法天元指南(1698)の序文に書いています．天元術は中国から伝わったもので，新編『算学啓蒙』(朱世傑著原本1299刊，日本で1658覆刻)，星野実宜の新編算学啓蒙註解(1672)や建部賢弘の算学啓蒙諺解大成(1690)もあり，当時日本ではこぞって研究したようですが，中国ではほとんど忘れられていたと言われています．古今算法記では遺題の答を文章で表した1変数方程式で与えています．また，古今算法記の遺題は1変数方程式に持ち込むのが難しく沢口も解き方を知らなかったと思われますが，この点は関連資料があるようですが必ずしもよく分かっていません．

古今算法記の遺題を解いたのは，発微算法の他にも算法明解(1679序)，和漢算法7〜9巻(1695刊)などがありますが，これらはこれ以上難しい問題を出す必要はないと思ったのか，遺題を出していません．例えば，古今算法記の問1は実質として次のような問題です．

図1のように円内に中円1つ，小円2つが内接しています．小円，中円，大円の直径を x, y, z とし，

$$y = x+a, \qquad z^2-y^2-2x^2 = b$$

のとき，x, y, z を求めよ．(実際の問は $a = 5$, $b = 480/\pi$ で補助線や式はありません．)［図は小川束著関孝和「発微算法」——現代語訳と解説——(大空社)より］

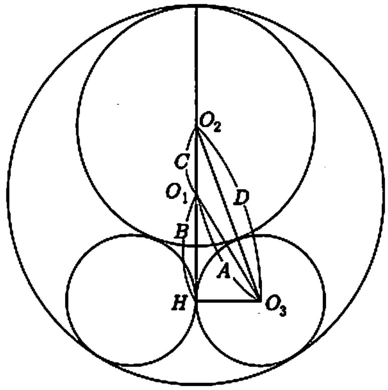

図1

関の答は

$$w = y^2, \qquad v = w+2x^2, \qquad u = b+v = z^2, \qquad t = xw$$

とおいて，突然

$$((4y-x)u-t)^2 = wu(4y+2x)^2$$

が求める方程式であるとしています．古今算法記と同じく式は括弧の代わりに置き換えを用い，後は×(相乗)と＋－(加減)と自乗(自)だけを用いて文章で与えています．実際，$y = x+a, u = z^2 = b+y^2+2x^2$ ですから，これは x の6次方程式です．私も図から独自に考えてみましたが，未知数を7つ使って方程式を7つ立て，余分な未知数を消去してなんとか建部の与えた等式

$$4BC = xy+(x+y)z-z^2$$

に到達しました．

$$4B^2 = (z-x)^2-x^2, \qquad 4C^2 = (z-y)^2$$

は簡単ですから，$16B^2C^2$ を2通りに表して計算すると z に関する4次と3次の項が消え z の2次方程式を得ます．そこで，z^2 を既知として，z について解いて自乗すると上の方程式が得られます．(中西正好の勾股弦適等集(1684刊)の最後付近に $4BC = xy+(x+y)z-z^2$ と同等な等式が書かれているのは，注目に値します．) 当時はこれでは分からないということで，嘘だと攻撃する本(算法入門(1681)＝算学詳解)まで刊行されました．そこで，関の弟子である建部賢弘が謎ときとして『発微算法演段諺解』(貞享2年＝1685刊)を出版し，補助未知数を立てて数係数だけでなく文字(未知数の式等)を係数とする方程式を2つ傍書法で書き，それらの方程式から補助未知数を消去して見せたので，やっと多くの人が納得したようです．傍書法(天元術で使う算木を模した数係数表示の横に文字を書くこと)によって未知数を増やした筆算が可能になり，和算がこの時点で大いに進歩したことは確かです．

この消去法を独立して説明したものが，関が書いたとされる『解伏題之法』でこれは刊行されたものではありませんが，1683年再訂となっていて写本が関流を中心に多く伝わっています．そこでは，消去法として終結式が行列式を用いて与えられており，4×4までの行列の行列式が正しく定義されています．残念ながら5×5行列の行列式では間違いがあるため，後世にいろんな課題を残しました．これについては後で述べたいと思います．(解伏題之法は東北大学和算ポー

タルには画像がないのですが，京都大学数理解析研究所講究録は京都大学学術情報リポジトリで簡単に見ることが出来，そこに小松彦三郎氏がいくつかの写本を比較して復元した「解伏題之法」(講究録 1392(2004)225-245) が載っています.)

消去法の効用は，それまで未知数が1つの方程式しか扱えなかったのを未知数が2つ以上の連立方程式を扱えるようにしたことです．そういえば，塵劫記の遺題の中にも連立1次方程式の問題が4つあり，そのひとつは三組三色と云い，3変数で方程式が3個のものです．これとほぼ同形式の問題が中国では1世紀ごろに完成したといわれている『九章算術』の8章方程に載っています．その問題は現代風に書けば以下のような問題です．

$$\begin{aligned} 3x+2y+\ z &= 39 \\ 2x+3y+\ z &= 34 \\ x+2y+3z &= 26 \end{aligned} \qquad \text{一般には} \qquad \begin{aligned} ax+by+cz &= m \\ dx+ey+fz &= n \\ gx+hy+kz &= p \end{aligned}$$

解き方はいわゆる掃き出し法で，ガウスの消去法とも呼ばれる方法です．大学や高専では

$$x = \frac{mek+bfp+cnh-mfh-bnk-cep}{aek+bfg+cdh-afh-bdk-ceg}$$

というクラメールの公式を習ったかも知れません．クラメールの本『代数曲線の解析入門』は 1750 年に出版されており，付録の中でこの 3×3 の場合の公式が上の形で明記され，一般の $n \times n$ の場合も文章で公式が述べられています．和算でも 3×3 の場合は当然計算できたはずで，アルゴリズムを歌にするなどしているのですが，括弧も等号もなかったためか，このような解の公式は書かれませんでした．3×3 の場合は東西ともにもっと前に知られていた可能性が高いのですが，出版された文献としては西洋のマクローリンの代数論(1748)が最初のようです．

さて，係数が y の多項式であるような2つの方程式(両式)

$$a+bx+cx^2+dx^3 = 0 \qquad (\text{前式})$$
$$e+fx+gx^2+hx^3 = 0 \qquad (\text{後式})$$

を考えます．$c=d=g=h=0$ つまり1次式のとき，

$$(\text{前})f-b(\text{後}) = af-be = 0$$

が成り立ちます．これを終結式と云います．同様に，$d=h=0$ つまり2次式のとき，

$$(\text{前})g-c(\text{後}) = ag-ce+(bg-cf)x$$

を(1式)，

$$\frac{(\text{前})e-a(\text{後})}{x} = be-af+(ce-ag)x$$

を(2式)とおくと，1次式の場合に帰着され終結式を得ます．3次式のときは，

$$\frac{(\text{前})e-a(\text{後})}{x} = be-af+(ce-ag)x+(de-ah)x^2 \qquad (1\text{式})$$

$$\frac{(\text{前})f-b(\text{後})+(1\text{式})}{x}$$
$$= ce-ag+(cf-bg+de-ah)x+(df-bh)x^2 \quad (2\text{式})$$

$$(\text{前})h-d(\text{後}) = ah-de+(bh-df)x+(ch-dg)x^2 \qquad (3\text{式})$$

とおきます．この部分は『解伏題之法』の換式第四，『算法発揮』上巻にあります．簡単のため

$$A+Bx+Cx^2=0 \qquad (1\text{式})$$
$$D+Ex+Fx^2=0 \qquad (2\text{式})$$
$$G+Hx+Ix^2=0 \qquad (3\text{式})$$

とおき直します．関は

$$(1\text{式})(EI-HF)+(2\text{式})(HC-BI)+(3\text{式})(BF-CE)=0$$

から，終結式

$$(AEI+DHC+GBF)-(AHF+DBI+GEC)=0$$

を得たように見えます．左辺は，(1式)(2式)(3式)の係数を行列の形に書いたときの行列式そのものです．また，各々の式に掛けたのは定数項の余因子(その行と列を除いて出来る行列の行列式に適当な符号を掛けたもの)で，ファンデルモンドの展開に相当します．算法発揮は定数項でなく，(1式)の係数 A, B, C で展開した形で行列式の定義を行っています．この違いの意味が解明できたので後でお伝えします．

『解伏題之法』(天和3年＝1683再訂)は，ライプニッツの個人ノートを除けば，世界で最初に行列式について述べた書(写本)であり，『算法発揮』(井関知辰撰・島田尚政跋，元禄3年＝1690刊)は世界で最初に行列式を正しく定義した刊本(出版され公開された本)です．

ちなみに，ライプニッツ(1646～1716)は行列式について結構いろんなことを知っていたことが分かってきています．1849年にはロピタル宛の手紙(スミスの英訳あり)が出版され，その中で上の3式(x^2でなくy)に対し，

$$AEI+BFG+CDH=AFH+BDI+CEG$$

を示していたことが知られています．さらに，$n\times n$の場合も符号を適当に決めて全ての積を足せば云々と行列式の定義に近いものがあります．また，膨大な手稿のうち1684年1月12日付とされるラテン語の手稿(LH 35-3 A 28 Bl. 3-4)をクノブロッホが解読し雑誌「Studia Leibnitiana 4(1972)，163-180」に発表したものを日本語訳してできたライプニッツ著作集第3巻数学II-36(補遺2)「諸方程式から文字を除くこと，あるいは複数の方程式を1個に還元することについて…」には，5×5の場合に行列式が算法発揮と同様に(1式)の係数で展開した形で与えられています．しかも展開は(1式)を除いた方程式にクラメール(ライプニッツ？)の公式を適用して得ています．しかし，ライプニッツの行列式や終結式に関する研究は雑誌 Acta Eruditorum に発表された彼の記法［今の記法 a_{01} の前段階で01などと書いた］を除いて後世には伝わらず，ほとんど影響を及ぼしていないのではないかと考えられています．

ニュートン(1642～1727)はというと，ケンブリッジ大学のルーカス教授職に就いていたときの講義録が Arithmetica Universalis(1707刊)として後任教授によって勝手に出版されてしまいました．その中には，上の前後3次式の終結式が

$$(df-cg-2bh)(adff-bdef)+\cdots$$

と計算抜きに結果が与えられており，やはり2変数連立方程式から変数を1つ消去するのに使われています．ニュートンは行列式を使わず，ただ変数を消すという操作を実行したと考えられ，これ以上の次数については言及がありません．

関の方法と算法発揮の方法を比較するために，行列式をご存じの方も定義を忘れて帰納的に考えてみましょう．まず3×3の場合を復習しましょう．和算では

式を縦に定数項から 1 次の項，2 次の項と係数のみで表すので，3 つの式を横に並べると，3×3 行列そのものです．関の計算は以下の図で示されます．一番右の図が 3 つの式の係数行列(前の式との対応は，丙 $= A$，乙 $= B$，甲 $= C$，己 $= D$，戊 $= E$，丁 $= F$，壬 $= G$，辛 $= H$，庚 $= I$)で，次が各式に定数項の余因子を掛けて得た $2\times3\times3 = 18$ 個の積に符号(生は正，尅は負)を添えた表です．定数項の和は行列式を与え，それ以外の和は零であることが確認できます．関は 4×4 の場合も 3×3 の場合と同様に実行しています．ただし，4×4 の行列式の定義が帰納法では未だ無いために，定数項以外の和が零であることを $6\times4\times4 = 96$ 個の積からなる表(行列と 32 個の積だけを左半分に図示)を使って確かめざるを得ませんでした．[図 2 は関孝和全集(平山諦他編著 1974 大阪教育図書)より解伏題之法の生尅第五の一部]

婁氐 尾牛 相乗 尅	危奎 亢心 相乗 生	斗虚 壁角 相乗 尅	房箕 女室 相乗 生
○	○	○	○
四 奎牛尾氐	五 奎虚心亢	二 壁虚箕角	一 室女箕氐
八 壁牛尾氐	七 奎女心亢	六 壁虚尾角	五 室女箕亢
十三 室牛尾氐	十一 奎牛心亢	十 壁虚心角	九 室女箕角

婁虚 亢心 相乗 尅	危箕 壁角 相乗 生	斗氐 女室 相乗 尅	房奎 尾牛 相乗 生
○	○	○	○
五 奎虚心亢	二 壁虚箕角	一 室女箕氐	四 奎牛尾氐
十六 壁虚心亢	十五 壁女箕角	十四 室女尾氐	十三 奎牛尾亢
廿 室虚心亢	十九 壁牛箕角	十八 室女心氐	十七 奎牛尾角

四式	三式	二式	仮如、一式
婁	危	斗	房
奎	虚	箕	氐
壁	女	尾	亢
室	牛	心	角

壬乙丁 相乗 生	己辛甲 相乗 生	丙戊庚 相乗 生
○	○	○
三 辛丁乙	二 辛戊甲	一 庚戊乙
六 庚丁乙	五 辛丁甲	四 庚戊甲

壬戊甲 相乗 尅	己乙庚 相乗 尅	丙辛丁 相乗 尅
○	○	○
二 辛戊甲	一 庚戊乙	三 辛丁乙
四 庚戊甲	六 庚丁乙	五 辛丁甲

三式	仮如、二式	一式
壬	己	丙
辛	戊	乙
庚	丁	甲

図 2

関はこの方法を「逐式交乗」と名付けたようですが，5×5 の場合では $24\times5\times5 = 600$ 個の積の表が必要で実際には実行しなかったようです．実行して記録に残したのは何と 115 年後の 1798 年のことで菅野元健の『補遺解伏題生尅篇』と石黒信由の『交式斜乗生尅補義』です．(どちらも残念ながら日本学士院等に行くことが必要で簡単には見られません．) そして，彼らは関が簡便法として与えた「交式」と「斜乗」についても訂正をしています．

一方，算法発揮はとても理論的な本で，理論と応用問題 7 問の解答からなり，記述の間違いもありません．理論は補助未知数に関する 2 つの n 次方程式から (1 式) ～ (n 式) という n 個の独立な ($n-1$) 次方程式つまり $n\times n$ 行列(陽率と名付けている)を作り，次にこの場合に即して行列式を帰納的に定義しているのです．具体的には，(1 式)の定数項は零でないとして，(1 式) と (k 式) から定数項を消去した式を (k' 式) とすると，($2'$ 式) から (n' 式) で作る $(n-1)\times(n-1)$ 行列の行列式は比較的簡単に元の $n\times n$ 行列の成分で計算できて，算法発

揮の展開(の何倍か)になります．$(n-1)\times(n-1)$ の行列式は帰納的に既に定義されているところがミソです．$n=3$ の場合は証明が書いてあり，それから類推をしたのが上の記述です．実際にこれらを実行しているのは $n=5$ までですが，それ以上も帰納的に定義する方法は以下の図から明解です．ちなみに，石黒が改版(宝永7年＝1710修)の算法発揮(の写本)を持っていたことは彼の「算法書籍目録」の記述から確かです．また，算法発揮3巻は広島大学の岩知道秀樹君が現代語に訳してくれ，小寺裕氏が運営するHP「和算の館」でも公開できそうです．[図3は岩知道氏のpdfファイルから拝借]

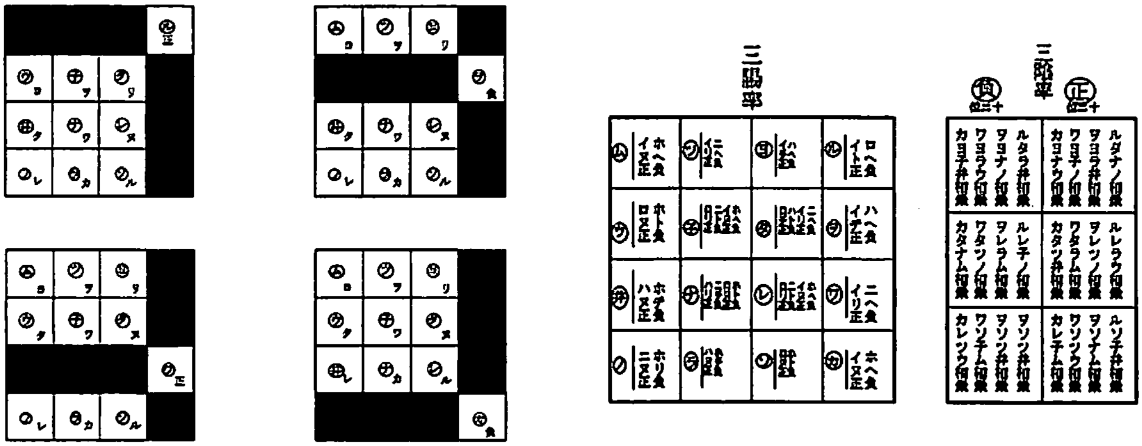

図3

この時代の和算家の中でいろいろな数学を手掛け活躍したという意味では関孝和がダントツですが，消去法と行列式に関しては，京阪の和算家たちも大いに活躍しています．上で述べた沢口一之・島田尚政・井関知辰の他にも田中由真(算法明解の著者)を落とすわけにはいきません．田中の研究は『算学紛解』という大阪府立中之島図書館にある写本(日本学士院にも大正時代に写したものがあり，近世歴史資料集成第IV期第2巻に採録)に詳しく，8巻のうち1巻から4巻が消去法に関係しています．行列式に関しては，彼も算法発揮と同じ展開を第1巻の斐式定格術の中で書いています．別に根源術という特徴的な方法が書かれています．具体的には m 次式と n 次式が与えられたとき，m 次式を n 乗，n 次式を m 乗して，掛けて mn 乗になるような係数を互いに掛けたものの一次結合で終結式が書けるというものです．つまり未定係数法だけで終結式が決まるのですが，詳しくは藤原松三郎数学史論文集『東洋数学史への招待』101ページをご覧ください．この方法は関の解伏題之法の定乗第三にも終結式の次数を計算する方法として取り上げられていますが，係数が零になる項の存在が無視されており，ここにも間違いがあるといわざるを得ません．

一方，両式のうち片方が

$$x^n = f(y)$$

のもの(冪演式)の研究が盛んに行われ，発微算法演段諺解(1685)では n が3まで，明元算法(1689)では n が6まで，一極算法(1689)では $n=7$，七乗冪演式(1691)では $n=8$ の結果が書かれています．古今算法記の問1の解答でも建部

は $n = 2$ の場合の平冪演式を使いました.

関孝和の死後 1711 年頃に建部賢明・賢弘兄弟が書き上げたとされる『大成算経』20 巻にも消去法や行列式は扱われており，解伏題は第 17 巻にあります．そこでは，終結式は交乗法と云う名前で算法発揮の方法と同様の形で与えられており，対称行列の場合を変乗法，冪演式を消長法と呼んでいます.

田中が所持していた証拠(田中の朱の署名あり)がある発微算法が関西大学にあります．さらに，関係書物の表現や関流の殿様有馬頼徸が算法発揮を『開法要旨』(日本学士院に写本，近世歴史資料集成第 IV 期第 3 巻に採録)で引用していることなどから想像を逞しくすると，島田・井関は算法発揮を書くときに発微算法演段諺解を参考にし，建部は大成算経第 17 巻を書くときに算法発揮を手元に持っていたと思えます．遺題を解くスピードからも想像以上に京阪と江戸の交流はあったと考えられます．そして，終結式や行列式について最初に気がついたのは誰か，それはどう伝わったのかということをもっと調べる必要があります.

三上義夫の「関孝和の業績と京坂の算家並びに支那の算法との関係及び比較」東洋学報 20-22(1932-35)は基本文献で，1949 年に参考論文付(6 分冊)で東北大学学位論文となっています．私は，小松・後藤の「17 世紀日本と 18-19 世紀西洋の行列式，終結式及び判別式」数理解析研究所講究録 1392(2004)117-129 に触発されて行列式研究史を始めましたが，第 1 行での展開と第 1 列の展開の違いを除けば歴史に関する疑問・課題は増すばかりです.

最後に，算法発揮と建部の不思議な関係について補足しておきます．建部賢弘は算法入門(1681)に対抗するため，算法入門が解いたという数学乗除往来(1674)の遺題 49 問を研幾算法(1683 刊)で正しく解き，算法入門の解答に間違いがあることを示し，数学力のない人の反論であるとしました．例えば，数学乗除往来の問 3「円に内接する 5 辺形の 5 辺の長さから円の直径を求めよ」です．古今算法記の遺題と同等かより難しい問題です．解くには終結式を 2 度取ることが必要ないわゆる衆伏で，この問題が算法発揮 7 問のうち最後の問に採用されているのです．そして，前に述べた有馬の開法要旨中巻(解伏題之法)では，算法発揮第七問答術として例題になっています．では，「円に内接する 4 辺形の 4 辺の長さから円の直径を求めよ」という問題は既知だったのでしょうか．関流二伝といわれる松永良弼が書いたとされる『算法演段品彙』(日本学士院に写本，近世歴史資料集成第 IV 期第 3 巻に採録)にこの円内四斜の解が載っていますが，ずっと後のことです．どういうことでしょう.

追記．東北大学の和算ポータルの整備が進行中です．「解伏題之法」と「補遺解伏題生尅篇」は現在見ることができます．「算法演段品彙」もいずれ見えます．また，「参両録」は京都大学貴重資料画像(一般貴重書(和))にあります.

(まつもと・たかお／広島大学)