有界な論理式で定義されない原始再帰的述語の例

赤部健人

広島大学理学研究科博士課程前期数学専攻

2015-03-26

はじめに

Hilbert の第 10 問題

整数係数多項式が整数を根に持つか否かを判定するアルゴリズムは存在するか?

これは次の定理を使って否定的に解決された。

MRDP 定理 (の一変種の概略)

$\mathbb{N}^k$ の以下のような部分集合のクラスから、各要素を射影して得られるクラスは全て同じ:

- 等式で定義されるもの
- 有界な論理式で定義されるもの
- 原始再帰的なもの
- 再帰的なもの

はじめに

テーマ

これら 4 つのクラスのうち、

- 有界な論理式で定義されるもの
- 原始再帰的なもの

の関係について考える。

(他の 2 つのクラスとの間には

- 等式で定義されるもの $\subsetneq$ 有界な論理式で定義されるもの
- 原始再帰的なもの $\subsetneq$ 再帰的なもの

という関係が知られている。)
以下、$0 \in \mathbb{N}$ とし、「k 変数関数」は関数 $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$、「$k$ 変数述語」は $\mathbb{N}^k$ の部分集合とする。

はじめに

また、「論理式」は自然数に関するもの、つまり、

- 自然数 $0, 1, 2, \ldots$ と変数 $x_0, x_1, x_2, \ldots$
- $+, \cdot, =, <, \neg, \wedge, \exists$

だけで書かれるものを考える。

定義

項とは、「多変数 $\mathbb{N}$ 係数多項式」のこと。
閉項とは、変数が現れず、自然数と同一視できる項のこと。
閉論理式とは、自由な (代入できる) 変数の無い論理式のこと。

閉論理式には通常の意味で (標準モデル上で) 真偽が定まる。

例

- $2\cdot(x_0+x_1)$ は項、$2\cdot(1+3)$ は (8 と同一視される) 閉項。
- $x_0+x_1=3$ は論理式、$\exists x_0(x_0\cdot x_0=2)$ は (真でない) 閉論理式。

有界な論理式と Δ_0-述語

定義 (有界な論理式)

論理式のうち、$\exists$ が全て $\exists \mathrm{x}{<}\mathrm{t}$ の形で現れるものは有界な論理式であるという。ここで、t は変数 x が現れない項である。

定義 (Δ_0-述語)

k 変数述語 P は、$\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_{k-1}$ のみを自由変数として持つ有界な論理式 $\mathbf{A}[\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_{k-1}]$ が存在し

$$P = \{ (a_0, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbb{N}^k \mid \mathbf{A}[a_0, \ldots, a_{k-1}] \text{ は真} \}$$

と表されるとき、つまり、有界な論理式で定義されるとき、Δ_0-述語であるという。
(自然数が代入された $\mathbf{A}[a_0, \ldots, a_{k-1}]$ は有界な閉論理式。)

有界な論理式の真偽

有界な閉論理式の真偽

有界な閉論理式 A の真偽は、論理式の高さ (論理記号 $\neg$, $\wedge$, $\exists$ の数) に関する帰納法で判定できる。

1. A が高さ 0、つまり $s{=}t$ または $s{<}t$ の形なら、
   s, t は閉項であり、両辺を計算して比較すれば良い。
2. A が $\neg B$ (または $B \wedge C$) の形なら、
   B (および C) は高さが減った有界な閉論理式であり、
   その真偽の否定 (または論理積) を考えれば良い。
3. A が $\exists x{<}t, B[x]$ の形なら、
   t は閉項、B[x] は x 以外の変数が自由でなく
   高さが減った有界な論理式であり、
   $B[0], \ldots, B[t-1]$ の真偽の論理和を考えれば良い。

原始再帰的関数と述語

定義 (原始再帰的関数)

1. 定数関数・座標関数・加法・乗法は原始再帰的
2. 原始再帰的関数の合成も原始再帰的
3. G が $(k+1)$ 変数原始再帰的関数で、
   H が $(k+2)$ 変数原始再帰的関数なら、
   次で定まる $(k+1)$ 変数関数 F も原始再帰的:

$$F(0,\mathfrak{a}) = G(\mathfrak{a})$$
$$F(a+1,\mathfrak{a}) = H(F(a,\mathfrak{a}), a, \mathfrak{a})$$

($\mathfrak{a}$ は $a_0, \ldots, a_{k-1}$ の略。)

原始再帰的関数と述語

定義 (原始再帰的述語)

原始再帰的述語とは、その定義関数が原始再帰的であるような述語のこと。

例 (原始再帰的な関数・述語)

- 定数関数、加法、乗法、冪乗、階乗は原始再帰的である。
- 原始再帰的関数の総和・総乗は原始再帰的である。
- 2 変数述語としての $<, \leq, >, \geq, =$ や原始再帰的述語の否定・論理和などは原始再帰的である。
- 原始再帰的な関数・述語から合成や場合分けによる定義で得られる関数・述語は原始再帰的である。

有限列の符号化

自然数の有限列はそれぞれ相異なる自然数と「原始再帰的」に同一視できる。

補題

以下の条件を満たす

- 各 k に対する k 変数原始再帰的関数 $\langle \cdot, \ldots, \cdot \rangle_k$ (符号)
- 1 変数原始再帰的関数 Lh (長さ)
- 2 変数原始再帰的関数 Elem (成分)

が存在する:

- 各 k, a_0, …, a_{k-1} ごとに $\langle a_0, \ldots, a_{k-1} \rangle_k$ は相異なる
- $\mathrm{Lh}\left(\langle a_0, \ldots, a_{k-1} \rangle_k\right) = k$
- $i < k$ のとき $\mathrm{Elem}\left(\langle a_0, \ldots, a_{k-1} \rangle_k, i\right) = a_i$
- $a > 0$ のとき $\mathrm{Lh}(a) < a$ かつ $\mathrm{Elem}(a, i) < a$

一般的な再帰

原始再帰的関数の定義に現れる再帰 (原始再帰) では 1 つ小さな引数に対する値のみが使われていたが、有限列を符号化することで、より小さな引数に対する値も使えるようになる。

補題

G が $(k+2)$ 変数原始再帰的関数なら、

$$F(a, \mathfrak{a}) = G(\langle F(0, \mathfrak{a}), \ldots, F(a-1, \mathfrak{a})\rangle_a, a, \mathfrak{a})$$

で定まる $(k+1)$ 変数関数 F も原始再帰的である。

一般的な再帰

更に、引数はある意味で小さくなっていれば良い。

補題 (原始再帰的関数についての再帰)

G_0 が $(k+1)$ 変数原始再帰的関数、
G_1 が $(k+2)$ 変数原始再帰的関数、
H, I が 1 変数原始再帰的関数で、
$I(a) > 0$ のとき $I(H(a)) < I(a)$ が成り立つなら、
次で定まる $(k+1)$ 変数関数 F も原始再帰的である:

$$F(a, \mathfrak{a}) = \begin{cases} G_0(a, \mathfrak{a}) & (I(a) = 0 \text{ のとき}) \\ G_1(F(H(a), \mathfrak{a}), a, \mathfrak{a}) & (\text{その他}) \end{cases}$$

(有限列の符号化により、H は複数あっても良い。)

Δ_0-述語と原始再帰的述語

Δ_0-述語と原始再帰的述語の間には次の関係がある。

事実

Δ_0-述語は原始再帰的である。

一方、Δ_0-述語にも再帰をある程度表現する能力がある。

例

- $\mathit{Exp} := \{\, (a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \mid c = b^a \,\}$ は Δ_0-述語である。
- $\mathit{Fct} := \{\, (a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b = a! \,\}$ は Δ_0-述語である。

しかし実は、Δ_0 でない原始再帰的述語を構成できる。

Δ_0-述語のクラス $\subsetneq$ 原始再帰的述語のクラス

論理式の符号化

論理式は可算個の記号の有限列なので、自然数と同一視できる。(実際には、Gödel 数化の手法により、ある意味で「原始再帰的」に同一視される。)
これにより、論理式についての関数・述語を考えられる。

例

- (自然数と同一視されている) 論理式の高さを求める 1 変数原始再帰的関数 Height が存在する。
- 1 変数述語 $\delta := \{$ 有界な論理式 (と同一視される自然数) $\}$ は原始再帰的である。

定理

1 変数述語 $\tau := \{$ 有界な閉論理式のうち真であるもの $\}$ は原始再帰的である。

証明: 有界な閉論理式の真偽が高さについての帰納法で判定できたので、τ は原始再帰的関数 Height についての再帰で定められ、再帰に関する補題により原始再帰的であることがわかる。

上の定理で「有界な」を除いた τ は Gödel の不完全性定理により再帰的ですらない。

系

1 変数述語 $\varphi := \{\, \mathbf{A}[\mathrm{x}_0] \in \delta \mid \mathbf{A}[\mathbf{A}[\mathrm{x}_0]] \notin \tau \,\}$ は原始再帰的ではあるが Δ_0 ではない。

証明: 背理法 (対角線論法) による。φ が x_0 のみを自由変数に持つ有界な論理式 $\mathbf{A}[\mathrm{x}_0]$ で定義されるとすると、

$$\mathbf{A}[\mathbf{A}[\mathrm{x}_0]] \text{ は真} \Leftrightarrow \mathbf{A}[\mathrm{x}_0] \in \varphi \Leftrightarrow \mathbf{A}[\mathbf{A}[\mathrm{x}_0]] \text{ は偽}$$

となり、矛盾する。

大まかに言うと、φ は「自分自身が記述している有界な論理式についての条件を満たさない有界な論理式全体」である。

参考文献

- J. R. Shoenfield, "Mathematical Logic", A K Peters, Ltd., Natick MA, 2001.
- P. Hájek and P. Pudlák, "Metamathematics of First-Order Arithmetic", Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- P. D'Aquino, "Local Behaviour of the Chebyshev Theorem in Models of $I\Delta_0$", J. Symbolic Logic, Vol. 57, No. 1 (Mar. 1992), pp. 12–27.