分割の些末組合せ論

山田裕史　岡山大学理学部

Hiro-Fumi Yamada, Okayama University

大変光栄なことに「第2回 広島－岡山 代数学セミナー」で講演させていただいた．前日に愚息の大学卒業式に出るため神戸まで在来線に乗って日帰りで出掛けており，準備をろくすっぽしていなかったのだが，一応，マトモな講演ができたと自負している．書き上げたばかりの数理研講究録 [MY] に沿っての話であった．その原稿をここに転載することには，問題があると思うので避けたい．興味をお持ちの方には個人的にお送りするのでリクエストして欲しい．ここでは補足するにとどめる．

講演（の前半）では自然数 $r \geq 2$ を固定し，r-類正則分割 $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\ldots)$ について

$$a_\lambda := \prod_{i\geq 1} i^{m_i},\ b_\lambda := \prod_{i\geq 1} m_i!$$

と置き，さらに

$$a_{r,n} := \prod_{\lambda\in\mathcal{P}^r(n)} a_\lambda\,,\ b_{r,n} := \prod_{\lambda\in\mathcal{P}^r(n)} b_\lambda$$

と定義した．これらについて

$$(*) \qquad b_{r,n} = r^{c_{r,n}}\, a_{r,n}$$

という性質を示したのであった．ここで $c_{r,n}$ は自然数であり，後で触れるグレイシャー対応を用いて記述可能なものである．

さて講演中に，元学生の安東雅訓に対して「この式 $(*)$ の q-アナログを作れ，明日までの宿題だ」と無茶を言った．前々日に風呂に入りながら急に思いついた問題である．$a_{r,n}$，$b_{r,n}$ の q-アナログの定義は誰が考えても同じものになる筈だ．つまり q-自然数，およびその階乗

$$[m]_q = \frac{1-q^m}{1-q}, \qquad [m]_q! = [m]_q[m-1]_q\cdots[2]_q[1]_q$$

を用いて

$$a_\lambda(q) := \prod_{i\geq 1} [i]_q^{m_i},\ b_\lambda(q) := \prod_{i\geq 1} [m_i]_q!$$

とすればよい．これらの積として $a_{r,n}(q)$, $b_{r,n}(q)$ も定義される．群論的，あるいは表現論的には意味不明な量であり，さらなる考察が必要だろう．もし $r > n$ ならば，すなわち $a_{r,n}(q) = a_n(q)$, $b_{r,n}(q) = b_n(q)$ のときは，小さな n について $a_n(q) = b_n(q)$ が実験的に確かめられる．私が（益川先生のように）風呂で気がついたのはまさにこのことであった．

モジュラーの場合，すなわち r が問題になる場合には，どうするか？
幸運なことに数年前，安東，鈴木武史と一緒に対称群の，正確には岩堀ヘッケ環の「次数付きカルタン行列」の行列式を調べたことがある ([ASY], [Y]). 直感的にそれが使えると判断して風呂から上がった．結局，それきりになってしまってそのまま講演の日を迎えた訳である．広島から帰って，少し手を入れてみて，直感が正しそうだということを確認した．

結果を述べるためにグレイシャー対応に触れる必要がある．これは r-正則分割全体の集合 $\mathcal{P}_r(n)$ と r-類正則分割全体の集合 $\mathcal{P}^r(n)$ の間の全単射のことである．

一般に $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \mathcal{P}_r(n)$ の rk という部分があれば，それを k^r と細分する．

$$(**) \qquad (rk) \longmapsto (k^r).$$

この操作を繰り返せば最終的に r-類正則な分割 $\widetilde{\lambda}$ が出来上がる．例で説明しよう．たとえば $r = 2$ として $\lambda = (8, 5, 2, 1) \in \mathcal{P}_2(16)$ を考える．これに対応させたいのは同じサイズの 2-類正則分割 $\widetilde{\lambda} \in \mathcal{P}^2(16)$ である．上で述べた操作を一つ一つ確認すると

$$\lambda = (8, 5, 2, 1) \longmapsto (5, 4^2, 2, 1) \longmapsto (5, 2^5, 1) \longmapsto (5, 1^{11}) = \widetilde{\lambda}.$$

さて不定元 Q_k $(k \geq 1)$ を用意して，上の $(**)$ の操作に Q_k というウエイトを付与する．$\lambda \in \mathcal{P}_r(n)$ に対してグレイシャー対応のすべてのステップに渡る Q_k たちの積を λ の「グレイシャーウエイト」とよび $G(\lambda)$ で表す．上の例では $G(\lambda) = Q_1^5 Q_2^2 Q_4$ である．一般に $\lambda \in \mathcal{P}_r(n)$ に対するグレイシャーウエイトの次数，すなわち Q の個数は

$$\deg(G(\lambda)) = \frac{\ell(\widetilde{\lambda}) - \ell(\lambda)}{r - 1}$$

で与えられる．上の $(*)$ における $c_{r,n}$ はまさにこの次数の和なのである．

$$c_{r,n} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_r(n)} G(\lambda).$$

結論を述べよう．$(*)$ の q-アナログは以下のようになる．

$$b_{r,n}(q) = a_{r,n}(q) \prod_{\lambda \in \mathcal{P}_r(n)} G(\lambda),$$

ただし

$$Q_k = \frac{1-q^{rk}}{1-q^k} = 1 + q^k + q^{2k} + \ldots + q^{(r-1)k}$$

と特殊化している．

広島－岡山代数学セミナーは懇親会も含め心地よい勉強会である．今後も永く続いていくことを祈念する．

3/28/2015

参考文献

[ASY] M. Ando, T. Suzuki and H. -F. Yamada, Combinatorics for graded Cartan matrics for the Iwahori-Hecke algebras of type A, Ann. Comb. 17 (2013), 427-442

[MY] 水川裕司，山田裕史，正則分割の組合せ論と対称群の指標表，数理研講究録に掲載予定 (2015)

[Y] 山田裕史，対称群のカルタン行列にまつわる組合せ論，2011 年度 代数学シンポジウム記録