# 奇数と台形数

安東雅訓
(稚内北星学園大学)

第一回に続いて講演させて頂き, ありがたい限りです. 講演の後半が自身の話したい結果により過ぎてしまった（それにしてももう少しまとまっていればよかったのですが, ）ことが反省点です. ここでは講演中に話せなかった講義室分割定理の内容を紹介し, 簡約講義室分割定理との関連を説明します.

整数列 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\ell)$ を講義室の前方から順に見た座席の高さとする. このとき各座席の高さを黒板との距離で割ったものが広義の増加列となる場合, すなわち,

$$0 \leq \frac{\mu_1}{1} \leq \frac{\mu_2}{2} \leq \ldots \leq \frac{\mu_\ell}{\ell}$$

を満たすときに $\mu$ は講義室分割であるという. 長さ $\ell$ の講義室分割全体の集合 $\mathcal{L}_\ell$ と, $2\ell - 1$ までの奇数による分割全体の集合 $\mathcal{OP}_\ell$ の母関数が一致するという次の結果が知られている.

**定理 1** (講義室分割定理 [1]). 任意の自然数 $\ell$ に対し, 次の式が成り立つ.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{OP}_\ell} q^{|\lambda|} = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{1 - q^{2k-1}} = \sum_{\mu \in \mathcal{L}_\ell} q^{|\mu|}.$$

これに対し, 中央の式の分子に「いちひくきゅうのだいけいすうじょう」が入った式が簡約講義室分割の母関数であった.

**定理 2** (簡約講義室分割定理 A.). 任意の自然数 $\ell$ に対し, 次の式が成り立つ.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{ROP}_\ell} q^{|\lambda|} = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{1 - q^{\binom{\ell+1}{2} - \binom{k}{2}}}{1 - q^{2k-1}} = \sum_{\mu \in \mathcal{RL}_\ell} q^{|\mu|}.$$

以下ではこの台形数で講義室分割と簡約講義室分割が繋がることの説明を行う.

簡約講義室分割の定義を復習すると, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell) \in \mathcal{L}_\ell$ が, 任意の $i$ に対し $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i - i, \ldots \mu_\ell) \notin \mathcal{L}_\ell$ であるとき, $\mu$ は簡約であるといった．よって, 講義室分割から簡約講義室分割を得るための自然な操作として, 第 $i$ 成分から $i$ を（講義室分割であることを保つ範囲で）引けるだけ引くというものが考えられる．この操作は講義室分割の条件で見た場合に, 不等式

$$0 \leq \frac{\mu_1}{1} \leq \frac{\mu_2}{2} \leq \ldots \leq \frac{\mu_\ell}{\ell}$$

の途中から 1 を引くことに対応する．途中で 1 が引けるのであれば「どうせ」その後ろからも引けるため, いっぺんに引いてもいいだろう．このいっぺんに引く操作をもう一度 $\mu$ に戻して考えれば, $(0, 0, 0, 4, 5, \ldots, \ell)$ の様な「下底 $\ell$ の」台形型を引いていることになり, このことと「いちひくきゅうのだいけいすうじょう」を掛けることが対応する．この対応は明らかではないかもしれないがここでは説明しない.

従って, 簡約講義室分割定理の「中央 = 右辺」は講義室分割から出せる式だ．では何が自身の結果といえるかというと, 一つは左辺が見えるような上手い約分を考えたこと．もう一つが講演の後半で紹介した全単射を構成するためのアルゴリズムだ．こちらがないとただ約分しただけの話になってしまうため, 長くなることは予想できたがつい話してしまった.

# 参考文献

[1] Bousquet-Mélou and K. Eriksson, Lecture hall partitions, *Ramanujan J.*, 1(1997a) 101-110