導来圏における Matlis dual と Grothendieck dual

岡山大学大学院　自然科学研究科　小野舞子

1　概要

本稿の内容は，吉野雄二先生との共同研究に基づくものである．

剰余体 k の入射包絡の双対 $\mathrm{Hom}_R(-, E_R(k))$ を Matlis dual と呼ばれる．一方で，正準加群 ω_R での双対 $\mathrm{Hom}_R(-, \omega_R)$ は maximal Cohen-Macaulay 加群の理論においてが大切な役割を担っている．これらの双対に対して，条件つきではあるが，導来圏で自然な同型を得ることができ，そのうえ一般化となる定理を導くことができた．さらに，圏論的な視点から Auslander-Reiten duality の一般化ができた．以上のことをまとめて報告する．

2　準備

以下，$(R, \mathfrak{m})$ を剰余体 k をもつ d 次元の可換 Noether 局所環とする．

定義 2.1. $M \neq 0$ を有限生成 R 加群とする．$\dim_R M = \mathrm{depth}_R M$ が成り立つとき，M を Cohen-Macaulay(CM) 加群という．環 R が R 加群として，CM 加群となるとき，R を Cohen-Macaulay(CM) 環という．また，有限生成 R 加群 M が $\dim R = \mathrm{depth}_R M$ を満たすとき，maximal Cohen-Macaulay(MCM) 加群であるという．ここで，$\mathrm{depth}_R M$ は，M 正則列の長さの最大値を表す．

定義 2.2. I_R が dualizing complex であるとは次を満たすときをいう．

1. I_R は入射加群からなる有界な複体である．

2. I_R のコホモロジーは全て有限生成である．

3. 自然な写像 $R \to \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(I_R, I_R)$ は同型である．

さらに，dualizing complex I_R が *normalized* dualizing complex であるとは，$i < 0$ では $I^i = 0$ であり，$\mathrm{H}^0(I_R) \neq 0$ を満たすときにいう．

定義 2.3. M を R 加群とする．

$$0 \to N \to F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} F_{i-2} \cdots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \to M \to 0$$

を M の極小射影分解とする．このとき，N を M の *i-th syzygy* と呼び，$N = \Omega^i(M)$ と表す．ただし，$\Omega^0(M) = M$ と定める．

さらに，$\mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_R(d_1, R))$ を M の *transpose* といい，$\mathrm{Tr}(M)$ とかく．

定義 2.4. M, N を有限生成 R 加群とする．$\mathfrak{P}(N,M)$ を N から M への準同型写像のうち，自由加群を経由するような写像からなる集合とする．$\mathfrak{P}(N,M)$ は $\mathrm{Hom}_R(N,M)$ の部分 R 加群となる．このとき，

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(N,M) = \mathrm{Hom}_R(N,M)/\mathfrak{P}(N,M).$$

また、$\underline{\mathrm{End}}_R(M)$ を $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,M)$ と表す.

補題 2.5 ([3]Lemma 3.9.)**.** M, N を有限生成 R 加群とする．このとき，次の $\underline{\mathrm{End}}_R(N) \times \underline{\mathrm{End}}_R(M)$ 加群の同型を得る．

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(N,M) \;\cong\; \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tr}(N), M)$$

定義 2.6. M を有限生成とは限らない R 加群とする．$\dim R/\mathfrak{p} \geq n$ となる素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，$M_{\mathfrak{p}} = 0$ であるとき，$\dim \mathrm{Supp} M \leq n-1$ と定義する．

3 主結果

以下，R は normalized dualizing complex I_R を持つとする．$\mathrm{Mod}R$ を R 加群のなす圏とする．また，$X \in \mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ に対して，$X^\vee = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, E_R(k)), X^\dagger = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, I_R)$ と表す.

定理 3.1. $Y \in \mathcal{D}^-(\mathrm{Mod}R)$ に対して，$i < 0$ のとき $\dim \mathrm{Supp} H^i(Y) \leq 0$ であるとする．このとき，

$$\tau^{>0}(Y^\vee) \xrightarrow[nat]{\sim} \tau^{>0}(Y^\dagger[d])$$

は $\mathcal{D}^+(\mathrm{Mod}R)$ で自然な同型を与える．

定理 3.1 の証明を同じようにすることで，より一般的な形を示すことができた.

定理 3.2. $Y \in \mathcal{D}^-(\mathrm{Mod}R)$ に対して，$i < 0$ のとき $\dim \mathrm{Supp} H^i(Y) \leq 1$ とする．このとき，次の完全列を得られる．

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_R(H^{-1}(Y), I_R^{d-1}) & \longrightarrow & H^1(Y^\vee) & \longrightarrow & H^{d+1}(Y^\dagger) & \longrightarrow \\
\mathrm{Hom}_R(H^{-2}(Y), I_R^{d-1}) & \longrightarrow & H^2(Y^\vee) & \longrightarrow & H^{d+2}(Y^\dagger) & \longrightarrow \\
 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\
\mathrm{Hom}_R(H^{-i}(Y), I_R^{d-1}) & \longrightarrow & H^i(Y^\vee) & \longrightarrow & H^{d+i}(Y^\dagger) & \longrightarrow \\
\mathrm{Hom}_R(H^{-i-1}(Y), I_R^{d-1}) & \longrightarrow & H^{i+1}(Y^\vee) & \longrightarrow & H^{d+i+1}(Y^\dagger) & \longrightarrow \\
 & & \cdots\cdots & & &
\end{array}$$

さらに，定理 3.1 から，導来圏を使った方法で Auslander-Reiten duality と呼ばれる次の定理に証明を与えことができ，その上，Auslander-Reiten duality の一般化を得ることができた.

定理 3.3. [3, Lemma 3.10(Auslander)] R はCM環であり，正準加群 ω_R をもつような環とする．M, N を MCM R 加群とする．さらに，M を *punctured spectrum* で *free* とする.（すなわち，極大イデアルでない素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，$M_{\mathfrak{p}}$ は自由 $R_{\mathfrak{p}}$ 加群であるとする.）このとき，次の同型が成り立つ.

$$\mathrm{Ext}_R^d(\underline{\mathrm{Hom}}_R(N, M), \omega_R) \cong \mathrm{Ext}_R^1(M, \tau N)$$

ここで，$\tau N = \mathrm{Hom}_R(\Omega^d(\mathrm{Tr}(N)), \omega_R)$ である.

定理 3.4. M, N を MCM R 加群とする．$\dim R/\mathfrak{p} \geq 2$ なる素イデアル $\mathfrak{p}$ での局所化 $M_{\mathfrak{p}}$ が自由 $R_{\mathfrak{p}}$ 加群であるとき，次の完全列を得る.

$$\mathrm{Hom}_R(\underline{\mathrm{Hom}}_R(N, M), I_R^{d-1}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(N, M)^{\vee} \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M, \tau N) \longrightarrow$$

$$\mathrm{Hom}_R(\underline{\mathrm{Hom}}_R(N, \Omega(M)), I_R^{d-1}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(N, \Omega(M))^{\vee} \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(M, \tau N) \longrightarrow$$

$$\cdots\cdots$$

参考文献

[1] R.HARTSHORNE, Residues and Duality, Springer Lecture Notes in Mathematics, no.20(1966)

[2] W.BRUNS and J.HERZOG, Cohen-Macaulay rings, revised edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **39**, *Cambridge University Press,Cambridge* (1998)

[3] Y.YOSHINO, Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings, London Mathematical Society Lecture Note Series, **146**, *Cambridge University Press, Cambridge*(1990)