逆辞書式順序におけるStanley-Reisner idealのgeneric initial idealについて

岡山大学大学院　自然科学研究科
清水大樹

$\mathbb{K}$は無限体で，$S=\mathbb{K}[x_1,\cdots,x_n]$，$I$を$S$の斉次イデアルとして，$M$は有限生成次数付き加群とする．$M$のベッチ数を$\beta_{ij}(M)=\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Tor}_i^S(M,\mathbb{K})_j$で表し，$M$のregularityとは，$\mathrm{reg}(M)=\max\{j-i|\beta_{ij}(M)\neq 0\ \forall i\}$で定義する．任意の$t\in\mathbb{Z}$に対して，$h_M(t)=\dim_{\mathbb{K}}(M)_t$で定義される関数$h_M:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}_+$を，$M$のヒルベルト関数という．ヒルベルト関数の生成関数をヒルベルト級数といい，$H_M(t)=\sum_i h_M(i)t^i$で表す.

1　序文

generic initial idealはGalligo, Bayer-Stillmanによって導入された．今回は，generic initial idealの次のような問題,“ 単項式順序を逆辞書式順序$>_{\mathrm{rlex}}$とする．Borel fixedなイデアルJを決めたとき，$\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I)=J$となるイデアル$I$を分類せよ ”を考察した．条件付きの解答として，イデアルIをStanley-Reisner idealに限定して，更に単体的複体の次元が1次元の場合においては，以下の結果を得たので報告する.

定理 4.1 $\mathbb{K}$の標数は0とする．Δは1次元の単体的複体で，I_ΔはSの*Stanley-Reisner ideal*とする．$>_{\mathrm{rlex}}$は逆辞書式順序で$x_1>_{\mathrm{rlex}}x_2>_{\mathrm{rlex}}\cdots>_{\mathrm{rlex}}x_n$と定める.

このとき，3以上のnについて以下は同値である.

(1) $f(\Delta)=(n,n-1)$かつΔは*tree*である，但し，$f(\Delta)$はΔの*f-vector*を表す.

(2) $\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)=(x_1^2,x_1x_2,\cdots,x_{n-2}^2)=(x_1,\cdots,x_{n-2})^2$,

(3) $H_{\mathbb{K}[\Delta]}(t) = \dfrac{1+(n-2)t}{(1-t)^2}$, $\mathrm{reg}(I_\Delta) = 2$ かつ $\mathbb{K}[\Delta]$ は*Cohen Macaulay*.

また，条件を変えて上記の定理と類似の結果についても合わせて報告する.

2 generic initial ideal

グレブナー基底の応用の一つとして，generic initial ideal と呼ばれる理論がある．ここでは，generic initial ideal の一般的な性質，逆辞書式順序における Bayer-Stillman の定理について紹介する．詳しくは [E]，[BS1]，[BS2] を参照せよ.

$>$ を S の単項式順序として，S の単項式順序に関するイニシャルイデアルを $\mathrm{in}_>(I) = (\mathrm{in}_>(f) | f \in I)$ と書く．正則行列 $g = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K})$ に対して $g : S \longrightarrow S \quad (x_i \longmapsto \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j)$，$S$ の変数に対して線形変換をすることで，環の自己同型写像を与える．イデアルに対しては，$g(I) = \{g(f) | f \in I\}$ と定める.

定理 2.1 (Galligo,Bayer-Stillman) *[BS2, 命題 1]*
$\mathbb{K}$: 無限体，$S = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$, $>$ を S の単項式順序とし，I は S の斉次イデアルとする.
このとき，ある空でないザリスキー開集合 $U \subset GL_n(\mathbb{K})$ が存在して任意の $g \in U$ に対して $\mathrm{in}_>(gI)$ は一定である.

定義 2.2 $\mathrm{in}_>(gI)$ $(g \in U)$ を I の **generic initial ideal** と呼び $\mathrm{gin}_>(I)$ と書く.

generic initial ideal について以下のことが知られている.

性質 2.3 *[MH, 補題 10.6]* 定理 *2.1* と同じ仮定とする.

(1) $h_{S/I}(t) = h_{S/\mathrm{gin}_>(I)}(t)$ である.

(2) $\mathrm{gin}_>(I)$ は，*Borel fixed* を満たす．*(i.e.* 任意の単項式 $a \in \mathrm{gin}_>(I)$ に対して，$x_j | a$ なら，$x_i \dfrac{a}{x_j} \in \mathrm{gin}_>(I)$ *(*$i < j$*)* を満たす．*)*

(3) $I \subset J$ なら $\mathrm{gin}_>(I) \subset \mathrm{gin}_>(J)$ である.

(4) $\mathrm{gin}_{>}(I)\mathbb{K}[x_1,...,x_{n+1}] = \mathrm{gin}_{>}(I\mathbb{K}[x_1,...,x_{n+1}])$.

(5) *[Bayer-Stillman] [BS2, 系 2]*
$P \in \mathrm{Ass}_S S/\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I)$ ならば，ある j が存在して，$P = (x_1,...,x_j)$ で書ける．

generic initial ideal と相性のよい逆辞書式順序に関する性質を紹介する．
S の単項式 X，Y を $X = x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$，$Y = x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$ とする．ただし，$a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ とする．$X{>_{\mathrm{rlex}}}Y$ を以下の条件で定義する．“ (1)deg$X>$deg$Y$, (2)deg$X$=deg$Y$ ならば，$(a_1-b_1,...,a_n-b_n)$ において最も右にある 0 でない成分が負．”$>_{\mathrm{rlex}}$ を逆辞書式順序と呼ぶ.
単項式順序を逆辞書式順序とすると次のことが知られている．

定理 2.4 (Bayer-Stillman) *[HH, 系 4.3.18] [BS1, 命題 2.9]*

(1) depth (S/I)=depth$(S/\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I))$ となる．

(2) $\mathrm{reg}(I)$=$\mathrm{reg}(\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I))$ となる．

(3) S/I が *CM* となる必要十分条件は，$S/\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I)$ は *CM* である．

(4) $\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I)$ は次数 m 以下の単項式で生成されており，次数 m の生成元を持っているとする．このとき　$\mathrm{reg}(\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I))$=$m$ となる．

3 Stanley-Reisner ring

Stanley-Reisner ring の基本事項について記しておく．詳しくは，[BH] を参照せよ．
有限集合 $V = \{1,...,n\}$ とする．2^V の部分集合 Δ が条件 $[\sigma \in \Delta, \tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in \Delta]$ を満たすとき Δ を V を頂点とする単体的複体という．また，Δ の元を face という．$\sigma \in \Delta$ に対して $\dim\sigma$=$|\sigma|-1$ とおき，$\dim\Delta = \max\{\dim\sigma | \sigma \in \Delta\}$ で定める．$\sigma \subset V$ に対して，$x_\sigma = \prod_{i\in\sigma} x_i$ と定める．
$I_\Delta = (x_\sigma | \sigma \notin \Delta)$ を S の Stanley-Reisner ideal と定義する．
$\mathbb{K}[\Delta] = S/I_\Delta$ を Δ の $\mathbb{K}$ 上の Stanley-Reisner ring と定義する．
Δ を単体的複体，$\dim\Delta = d-1$ とする．
$F_i(\Delta) = \{\sigma \in \Delta | \dim\sigma = i\}$ とし，$f_i = |F_i(\Delta)|$，$f_{-1} = 1$ と定め，$f(\Delta) = (f_0, f_1, ..., f_{d-1})$ を Δ の $f-vector$ という．
Stanley-Reisner ring のヒルベルト級数，次元については以下のことが知られている．

定理 3.1 *[BH, 定理 5.1.7]* Δ は単体的複体で，$f(\Delta)=(f_0,f_1,...,f_{d-1})$ とする．

このとき $\mathbb{K}[\Delta]$ のヒルベルト級数は

$$H_{\mathbb{K}[\Delta]}(t)=\sum_{i=-1}^{d-1}\frac{f_i t^{i+1}}{(1-t)^{i+1}}$$

で表せる．

定理 3.2 *[BH, 定理 5.1.4]* Δ を単体的複体とする．このとき，$\mathbb{K}[\Delta]$ の次元は

$$\mathrm{dim}\mathbb{K}[\Delta]=\mathrm{dim}\Delta+1$$

である．

次の命題は，Reisner の定理 [BH, 系 5.3.9] から導かれることが知られている．

命題 3.3 *[GW, 例 7.79]* $\dim\Delta=1$ とする．Δ が連結であることの必要十分条件は，$\mathbb{K}[\Delta]$ が *CM* である．

regurality でグラフのサイクルに関する特徴をつけたのが次の命題である．

命題 3.4 *[S, 命題 5.1]* $\mathrm{dim}\Delta=1$ とする．$S=\mathbb{K}[x_1,\cdots,x_n](n\geqq 3)$ とし，I_Δ は S の *Stanley-Reisner ideal* とする．

(1) Δ がサイクルを持たないことの必要十分条件は，$\mathrm{reg}(I_\Delta)=2$ である．

(2) Δ がサイクルを持つことの必要十分条件は，$\mathrm{reg}(I_\Delta)=3$ である．

4 主結果

定理 4.1 の証明を与える．

定理 4.1 Δ を単体的複体，$\dim\Delta=1$ とする．$S=\mathbb{K}[x_1,\cdots,x_n]$, $(n\geqq 3)$ $>_{\mathrm{rlex}}$ は逆辞書式順序 $x_1>_{\mathrm{rlex}}x_2>_{\mathrm{rlex}}...>_{\mathrm{rlex}}x_n$ とし，I_Δ は S の *Stanley-Reisner ideal* とする．

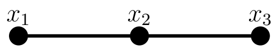
このとき以下は同値.

(1) $f(\Delta)=(n,n-1)$ かつ Δ は *tree* である．

(2) $\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$=$(x_1^2, x_1x_2, \cdots, x_{n-2}^2)$=$(x_1, \cdots, x_{n-2})^2$,

(3) $H_{\mathbb{K}[\Delta]}(t) = \dfrac{1+(n-2)t}{(1-t)^2}$，$\mathrm{reg}(I_\Delta) = 2$ かつ $\mathbb{K}[\Delta]$ は *CM.*

定理 4.1 の **Proof**.
(1) $\Leftrightarrow$ (3) 定理 3.1，命題 3.3，命題 3.4 から従う．
(2) $\Rightarrow$ (3) については，$\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$=$(x_1, \cdots, x_{n-2})^2$ から (3) を導くことができる．
(1) $\Rightarrow$ (2)
点と辺による帰納法で示す．
$f(\Delta) = (3, 2)$ のとき Δ



$I_\Delta = (x_1x_3)$ より，$\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta) = (x_1^2)$ である．
$f(\Delta) = (n-1, n-2)$, Δ は tree で $\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$= $(x_1, ..., x_{n-3})^2$ まで正しいとする．
このとき，$f(\Delta) = (n, n-1)$, Δ は tree で $\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$= $(x_1, ..., x_{n-2})^2$ を示す．
Δ から点と辺を一つずつ連結となるように除去した単体的複体を Δ' とする．性質 2.3 より $I_{\Delta'}S \subset I_\Delta$ より $\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_{\Delta'})S \subset \mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$ から帰納法の仮定より $(x_1, ..., x_{n-3})^2 \subset \mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$. $f(\Delta) = (n, n-1)$ から $H_{\mathbb{K}[\Delta]}(t) = \dfrac{1+(n-2)t}{(1-t)^2}$ が導かれ，
$H_{\mathbb{K}[\Delta]}(t) = \{1+(n-2)t\}(1+2t+3t^2+4t^3+5t^4+\cdots)$
したがって，$H_{\mathbb{K}[\Delta]}(t) = 1+nt+(2n-1)t^2+(3n-2)t^3+(4n-3)t^4+\cdots$ である．
また，$\mathrm{reg}(I_\Delta) = \mathrm{reg}(\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)) = 2$ で，定理 2.4 より $\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$ の生成元は 2 次の単項式で生成されることがわかる．

$$|\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)| = \binom{n+1}{2} - (2n-1) = \binom{n-2}{2} + (n-2)$$

である．
また，Δ が tree であることから，$\mathbb{K}[\Delta]$ は CM. $\Leftrightarrow$ $S/\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$ は CM より，任意の $P \in \mathrm{Ass}_S S/\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$ に対して $\mathrm{depth} S/\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta) = \dim S/P = 2$ であるから，$P = (x_1, \cdots, x_{n-2})$ となる．これは，x_{n-1}，x_n が $\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$ の生成元の中の単項式を割りきないことを意味している．以上のことから

$$\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta) = (x_1, \cdots, x_{n-2})^2$$

が求まる． □

類似の結果についても紹介する．証明については [S, 定理 5.4, 定理 5.5] を参照せよ．

定理 4.2 定理 *4.1* と同じ仮定の元で
このとき以下は同値.

(1) $f(\Delta)=(n,n-2)$ かつ Δ は非連結でサイクルを持たない.

(2) $\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$=$(x_1^2, x_1x_2, \cdots, x_{n-2}^2, x_1x_{n-1})$,

(3) $H_{\mathbb{K}[\Delta]}(t)=\dfrac{1+(n-2)t-t^2}{(1-t)^2}$, $\mathrm{reg}(I_\Delta)=2$ かつ $\mathbb{K}[\Delta]$ は *nonCM.*

定理 4.3 定理 *4.1* と同じ仮定の元で
このとき以下は同値.

(1) $f(\Delta)=(n,n)$ かつ Δ は連結で一つのサイクルをもつ.

(2) $\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_\Delta)$=$(x_1^2, x_1x_2, \cdots, x_{n-3}x_{n-2}, x_{n-2}^3)$,

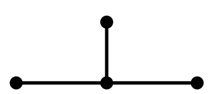
(3) $H_{\mathbb{K}[\Delta]}(t)=\dfrac{1+(n-2)t+t^2}{(1-t)^2}$, $\mathrm{reg}(I_\Delta)=3$ かつ $\mathbb{K}[\Delta]$ は*CM.*

上で述べた定理を用いて単体的複体の次元が 1 次元の場合の Stanley-Reisner ideal の generic initial ideal を見てみる.

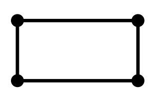
例 4.4 $S=\mathbb{K}[x,y,z,w]$ $(x>_{\mathrm{rlex}}y>_{\mathrm{rlex}}z>_{\mathrm{rlex}}w)$ とする.
Δ_1

Δ_2

Δ_3



Δ_4



$$
\mathrm{gin}_{>_{\mathrm{rlex}}}(I_{\Delta_i}) = \begin{cases} (x^2, xy, y^2, xz) & (i = 1) \\ (x^2, xy, y^2) & (i = 2, 3) \\ (x^2, xy, y^3) & (i = 4) \end{cases}
$$

参考文献

[E] D. Eisenbud; Commutative algebra with a view toward algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer, 1995.

[BS1] D. Bayer and M. Stillman; A criterion for detecting m-regularity, Invent. Math., 87(1987), 1-11.

[BS2] D. Bayer and M. Stillman; A theorem on refining division orders by the reverse lexicographic order, Duke Mathematical Journal, Vol.55,No.2.(1987),321-328.

[BH] W. Bruns and J. Herzog; Cohen-Macaulay Rings, Revised Ed., Cambridge U.P, 1998.

[HH] J.Herzog and T.Hibi; Monomial Ideals,Graduate Texts in Mathematics 260, Springer, 2010.

[M] 松村英之; （復刊）可換環論, 共立出版, 2000.

[GW] 後藤四郎, 渡辺敬一; 可換環論, 日本評論社, 2011.

[MH] 村井聡; ジェネリックイニシャルイデアル, “ グレブナー基底の現在 ”（日比孝之編）, 数学書房, (2006), 215-240.

[H] 日比孝之; 可換代数と組合せ論, シュプリンガーフェアラーク東京, 1995.

[S] 清水大樹; 逆辞書式順序における Stanley-Reisner ideal の generic initial ideal について, 岡山大学修士論文, 2015.

E-mail address: pkbn2rph@s.okayama-u.ac.jp