代数学 I (第8回)

都築 暢夫

6 月 16 日（金） 3・4 時限

簡単のため、F を代数閉体とする。今回考える行列はすべて F 係数とする。また、線形空間は F 線形空間とする。

1. 最小多項式

A を n 次正方行列とする。0 でない F 係数多項式 $f(x)$ で $f(A) = 0$ となるものの中で次数が最小で最大次数の係数が 1 となるものを A の最小多項式といい、$\psi_A(x)$ と表す (教科書 206 ページ [B] 問題 6)。Cayley-Hamilton の定理より $\phi_A(A) = 0$ となるから、最小多項式 $\psi_A(x)$ は存在する。また、相似な行列の最小多項式は同じである。

命題 1.1. $f(x)$ を $f(A) = 0$ となる F 係数多項式とする。このとき、$\psi_A(x)$ は $f(x)$ を割り切る。特に、最小多項式 $\psi_A(x)$ は固有多項式 $\phi_A(x)$ を割り切る。

証明. $f(x)$ を $\psi_A(x)$ で割った商を $q(x)$、余りを $r(x)$ とすると

$$f(x) = \psi_A(x)q(x) + r(x) \quad \deg(r(x)) < \deg(\psi_A(x))$$

となる。A を代入すると $f(A) = 0$ かつ $\psi_A(A) = 0$ となるので、$r(A) = 0$ である。$\psi_A(x)$ の次数の最小性から $r(x) = 0$ となる。したがって、$\psi_A(x)$ は $f(x)$ を割り切る。特に、以下は Cayley-Hamilton の定理から成り立つ。 □

定理 1.2. A の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_s\,(i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j)$ とする。m_i を固有値 λ_i の Jordan ブロックの中の最大の次数とすると、A の最小多項式は

$$\psi_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_s)^{m_s}$$

である。

証明. 相似な行列の最小多項式は同じだから、Jordan 標準形に対して最小多項式を考えればよい。λ_i を A の固有値とし、$J(\lambda_i, k)$ をその Jordan ブロックとする。$(\lambda_i I_k - J(\lambda_i, k))^j \neq 0\,(j < k)$ かつ $(\lambda_i I_k - J(\lambda_i, k))^k = 0$ となるので、A の最小多項式は $(x - \lambda_i)^{m_i}$ を因子に持てばよい。したがって、$\psi_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_s)^{m_s}$ である。 □

例 1.3. 第 6 回 1 章の行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ を考える。A の固有多項式は $\phi_A(x) = (x-3)^3$ より、最小多項式は $x-3, (x-3)^2, (x-3)^3$ のいずれかである。$(A-3E_3)^2 \neq 0$ より、最小多項式は $\psi_A(x) = (x-3)^3$ となる。 □

例 1.4. 3 次複素行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 14 & 5 & 21 \\ -6 & -3 & -11 \end{pmatrix}$ とする。A の固有多項式は

$$\phi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -3 \\ -14 & x-5 & -21 \\ 6 & 3 & x+11 \end{vmatrix} = (x+2)^3$$

となるので、最小多項式は $x+2, (x+2)^2, (x+2)^3$ のいずれかである。$A + 2E_3 \neq 0$ であり、

$$(A+2E_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -14 & -7 & -21 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}^2 = 0$$

となるので、最小多項式は $\psi_A(x) = (x-3)^2$ となる。A の Jordan 標準形は $\begin{pmatrix} J(-2,2) & \\ & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ となる。また、固有値 -2 に関する固有空間 $V(-2)$ の次元は 2 である。

□

例 1.5. 2 次正方行列の場合の Jordan 標準形、固有多項式、最小多項式と 固有空間の次元の関係は次の表のようになる。ただし、異なる文字 α, β は互いに異なる F の元とする。

Jordan 標準形	固有多項式	最小多項式	固有空間の次元
$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$	$(x-\alpha)(x-\beta)$	$(x-\alpha)(x-\beta)$	(1,1)
$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$(x-\alpha)^2$	$(x-\alpha)^2$	1
$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$(x-\alpha)^2$	$x-\alpha$	2

したがって、固有多項式と最小多項式、または、固有多項式と固有空間の次元が解れば Jordan 標準形がわかる。 □

例 1.6. 3 次正方行列の場合の Jordan 標準形、固有多項式、最小多項式と 固有空間の次元の関係は次の表のようになる。ただし、異なる文字 α, β, γ は互いに異なる F の元とする。

Jordan 標準形	固有多項式	最小多項式	固有空間の次元
$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$	$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$	$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$	$(1, 1, 1)$
$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$	$(x-\alpha)^2(x-\beta)$	$(x-\alpha)^2(x-\beta)$	$(1, 1)$
$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$	$(x-\alpha)^2(x-\beta)$	$(x-\alpha)(x-\beta)$	$(2, 1)$
$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$(x-\alpha)^3$	$(x-\alpha)^3$	1
$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$(x-\alpha)^3$	$(x-\alpha)^2$	2
$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$(x-\alpha)^3$	$x-\alpha$	3

したがって、固有多項式と最小多項式、または、固有多項式と固有空間の次元が解れば Jordan 標準形がわかる。 □

一般には、固有多項式と最小多項式だけからでは Jordan 標準形は決まらない。4 次正方行列でそういう例が出てくる (問題)。また、例えば 2 つの 7 次の Jordan 行列

$$\begin{pmatrix} J(\alpha,3) & & \\ & J(\alpha,3) & \\ & & J(\alpha,1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} J(\alpha,3) & & \\ & J(\alpha,2) & \\ & & J(\alpha,2) \end{pmatrix}$$

は、固有多項式、最小多項式と固有空間の次元がすべて一致する。

2. 正方行列の累乗

正方行列 A の累乗 A^n の求め方を考える。A の Jordan 標準形が可逆行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, k_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_s, k_s) \end{pmatrix} = J$$

と得られるとする。すると

$$A^n = (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} J(\lambda_1, k_1)^n & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_s, k_s)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

となるので、各 Jordan ブロックの n 乗を求めればよい。

k 次正方行列 N を

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。すると、$1 \leq n \leq k-1$ に対して

$$N^n = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & n+1\,\text{列} & & & \\ & & & \vdots & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdots k-n\,\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

となる。N の固有値は 0 のみだから N はべき零行列であり、第 7 回命題 1.1 より $N^n = 0\,(n \geq k)$ となる。便宜上、$N^0 = E_k$ とする。

N と単位行列 E_k は可換なので、2 項定理から

$$J(\lambda, k)^n = (\lambda E_k + N)^n = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \lambda^{n-i} N^i = \sum_{i=0}^{\min\{n,k-1\}} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \lambda^{n-i} N^i$$

となる。ただし、$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-i)!i!}$ は 2 項係数、$\min\{n, k-1\}$ は n と $k-1$ の小さい方を意味する。

例 2.1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると、第 7 回例 3.3 から

$$P^{-1}AP = J(3,3) \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。$n \geq 0$ のとき、$J(3,3)$ の累乗は

$$J(3,3)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & \frac{3^{n-2}n(n-1)}{2} \\ 0 & 3^n & 3^{n-1}n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
A^n = PJ(3,3)^n P^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & \frac{3^{n-2}n(n-1)}{2} \\ 0 & 3^n & 3^{n-1}n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 3^{n-2} \begin{pmatrix} -n^2+7n+9 & 6n & -2n(n-4) \\ \frac{n(n-13)}{2} & -3(n-3) & n(n-10) \\ \frac{n(n-7)}{2} & -3n & n^2-4n+9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。 □

問題 9. 4 次正方行列の Jordan 標準形、固有多項式、最小多項式、および固有空間の次元を分類せよ。