平成 17 年度後期代数学 D・代数学基礎講義 B

都築 暢夫

第 I 部　ζ 関数の解析的性質

Riemann ζ 関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

は、s の実部が 1 より大きい複素数上で定義される解析関数であり、整数論だけでなく数学において最も重要な関数である。$\zeta(s)$ は $s = 1$ に 1 位の極を持つ全平面上の有理型関数に解析接続され、関数等式を持ち、素数の分布と密接な関係を持つ。それらの性質を解説するのが第 I 部の目的である。

Contents

参考文献

Ahlfors, L.V., 「複素解析 (第 3 版)」(笠原乾吉訳), 現代数学者, 1979.

Davenport, H., Multiplicative number theory (second edition), GTM 74, Springer-Verlag, 1980.

Hardy, G.H., Wright, E.M., An introduction to the theory of numbers (fourth edition), Oxford at the clarendon press, 1960.

Serre, J.P., A course in Arithmetic, GTM 7, Springer-Verlag, 1973. (仏語版が元本でその英訳、邦訳もある。)

杉浦光夫 「解析入門 I」基礎数学 2, 東京大学出版会, 1980.

1. Riemann ゼータ関数と Dirichlet L 関数

1.1. Riemann ゼータ関数. この章と次の章で、Riemann ゼータ関数の解析関数としての基本的性質である次の定理を証明する。さらに、特殊値や零点、素数定理等を第 I 部で扱う。

定理 1.

Riemann ζ 関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ に関して次が成り立つ。

(1) $\zeta(s)$ は、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束する正則関数で、Euler 積表示

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

をもつ。特に、$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で零点を持たない。

(2) $\zeta(s)$ は、全平面に有理型関数として解析接続し、$s = 1$ にのみ位数 1 で、留数 1 の極を持つ。

(3) $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ とおくと、関数等式

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

をもつ。ここで、$\Gamma(s)$ は Γ 関数を表す。

1.2. Dirichlet 指標. Dirichlet 指標を導入する。

定義 2.

(1) N を正の整数とする。写像 $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ で次の条件を満たすものを、導手 N の **Dirichlet 指標**という。ただし、(a, b) で a と b の最大公約数を表す。
  (i) $m \equiv n \pmod N \Rightarrow \chi(m) = \chi(n)$
  (ii) $\chi(m) \neq 0 \Leftrightarrow (m, N) = 1$
  (iii) $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$

(2) Dirichlet 指標 χ が**自明**とは、$\chi(n) \neq 0$ ならば $\chi(n) = 1$ となるものをいう。

(3) $\chi(-1) = 1$ となる Dirichlet 指標を偶、$\chi(-1) = -1$ となる Dirichlet 指標を奇という。

(4) χ が導手 N の**原始的**な Dirichlet 指標とは、任意の N の約数 $M > 0$ と任意の導手 M の Dirichlet 指標 ρ に対して、$\rho(n) = \chi(n)\,(\forall n, (n, N) = 1)$ ならば $M = N$ となるものをいう。(ρ の条件を満たす指標で、導手が最小のものを χ に付随する原始的指標ということにする。)

命題 3.

N が 2 以上のとき、導手 N の Dirichlet 指標を与えることと準同型 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ を与えることは同じである。特に、χ の像は 0 または 1 のべき根である。

Dirichlet 指標 χ は準同型だから、 $\chi(-1) = \pm 1$ となる。よって、任意の指標は偶か奇のどちらかである。

例 1.

(1) 導手が 1 の指標は自明な指標のみである。任意の導手に対して、自明な指標は偶で、導手が 1 の自明な指標が付随する原始的指標である。

(2) 導手が 4 の Dirichlet 指標は、自明なもの ϵ と非自明なもの χ

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{if } n \equiv 3 \pmod 4 \\ 0 & \text{if } n \equiv 0, 2 \pmod 4 \end{cases}$$

のみである。χ は原始的かつ奇である。

(3) 導手が 8 の Dirichlet 指標は、

$n \pmod 8$	1	3	5	7	0, 2, 4, 6
ϵ	1	1	1	1	0
χ_1	1	-1	1	-1	0
χ_2	1	1	-1	-1	0
χ_3	1	-1	-1	1	0

のみである。χ_2, χ_3 は原始的指標で、導手が 4 の非自明な指標 χ が χ_1 に付随する原始的指標である。また、$7 \equiv -1 \pmod 8$ なので、ϵ, χ_3 が偶で、χ_1, χ_2 が奇である。

命題 4.

L, M を互いに素な正の整数とする。このとき、次の写像は全単射になる。

$$\begin{array}{ccc} \{\text{導手 } LM \text{ の Dirichlet 指標}\} & \to & \{\text{導手 } L \text{ の Dirichlet 指標}\} \times \{\text{導手 } M \text{ の Dirichlet 指標}\} \\ \chi & \mapsto & (\chi_1, \chi_2) \end{array}$$

ただし、χ_1 と χ_2 は自然な乗法群の同型 $(\mathbb{Z}/LM\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times$ (単因子論 (第 II 部 2 章 4 節)) のもと、それぞれ第 1 成分、第 2 成分への制限を表す。さらに、χ が原始的であることと χ_1 と χ_2 がともに原始的であることは同値である。

命題 5.

χ を自明でない Dirichlet 指標とすると、任意の整数 $l \leq m$ に対して、和 $\sum_{n=l}^{m} \chi(n)$ は有界である。

命題 5 は次の命題の系から明らか。

命題 6.

A を位数が n の Abel 群とする。

(1) $\widehat{A}$ を A から $\mathbb{C}$ の乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への準同型全体のなす集合とする。このとき、$\widehat{A}$ は A 上の関数の積により Abel 群になり、抽象群として A と同型になる。また、$g \in A$ を位数が m とすると、ある $\rho \in \widehat{A}$ で $\rho(g)$ が 1 の原始 m 乗根になるものが存在する。

(2) $A \to \widehat{\widehat{A}}\,(a \mapsto (\rho \in \widehat{A} \mapsto \rho(a)))$ は群の同型になる。

(3) $\rho \in \widehat{A}$ に対して次が成り立つ。

$$\sum_{g \in A} \rho(g) = \begin{cases} n & \text{if } \rho \text{ は自明} \\ 0 & \text{if } \rho \text{ は自明でない} \end{cases}$$

$\because$ (1) 有限 Abel 群の基本定理 (第 II 部 2 章 4 節) から、A は巡回群の直積に分解する。よって、A が巡回群の場合に証明すればよい。A が位数 n の巡回群とする。A からの準同型は生成元の行き先で決まり、この場合は生成元は 1 の n 乗根に行く。$\mathbb{C}^\times$ の中で、1 の n 乗根全体は位数 n の巡回群になるから $\widehat{A}$ は抽象群として A と同型である。

(2) (1) から、$A \to \widehat{\widehat{A}}$ が単射は明らか。位数が同じ有限群なので、同型になる。

(3) ρ が自明のときは明らか。ρ が自明でないとすると、$h \in A$ に対し

$$\rho(h) \sum_{g \in A} \rho(g) = \sum_{g \in A} \rho(hg) = \sum_{g \in A} \rho(g)$$

となる。$\rho(h) \neq 1$ なる $h \in A$ が存在するので、和は 0 になる。 $\square$

系 7.

χ を導手 N の Dirichlet 指標とすると、

$$\sum_{n=0}^{N} \chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } \chi \text{ は自明でない} \\ \varphi(N) & \text{if } \chi \text{ は自明} \end{cases}$$

が成り立つ。ただし、φ は **Euler 関数**、すなわち $\varphi(1) = 1, \varphi(N) = \sharp(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ $(N \geq 2)$ とする。

1.3. **Dirichlet L 関数.** Dirichlet L 関数を導入する。

定義 8.

Dirichlet 指標 χ に対して

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

を、指標 χ の **Dirichlet L 関数**という。

定義 9.

Dirichlet 指標 χ に対して、$\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ と複素共役の合成を χ の双対指標といい、$\overline{\chi}$ で表す。

定理 10.

導手 N の Dirichlet 指標 χ に対する Dirichlet L 関数 $L(s, \chi)$ に関して次が成り立つ。

(1) $L(s, \chi)$ は、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し、非自明な χ に対しては $\mathrm{Re}(s) > 0$ で収束する正則関数である。また、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で Euler 積表示

$$L(s, \chi) = \prod_{p:\text{素数}} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$$

をもつ。特に、$L(s, \chi)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で零点を持たない。また、χ が非自明のとき、$L(1, \chi) \neq 0$ である。

(2) χ が自明な指標のときは、$L(s, \chi)$ は全平面に有理型関数として解析接続し、$s = 1$ のみに 1 位の極を持つ。χ が非自明な指標のときは、$L(s, \chi)$ は全平面に正則関数として解析接続する。

(3) χ を原始的な Dirichlet 指標とする。χ が偶のとき $\delta = 0$、χ が奇のとき $\delta = 1$ とし、

$$W_\chi = \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{N} i^\delta}, \quad \tau(\chi) = \sum_{n=1}^{N} \chi(n) e^{2\pi i n/N}$$

とする。($\tau(\chi)$ は Gauss 和で、2.2 節にて解説する。特に、$|W_\chi| = 1$ となる。) このとき、

$$\xi_\chi(s) = \left(\frac{N}{\pi}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s + \delta}{2}\right) L(s, \chi)$$

とおくと、関数等式

$$\xi_\chi(s) = W_\chi \xi_{\overline{\chi}}(1 - s)$$

が成り立つ。

Euler 積表示から、次の命題を得る。$1 - \chi(p) p^{-s}$ は全平面で正則な関数で、零点の位置が解っているから、Riemann ζ 関数と原始的な Dirichlet 指標に関する Dirichlet L 関数の場合が本質的なことが解る。

命題 11.

χ を導手 N の Dirichlet 指標とする。全平面上の解析関数として、次が成り立つ。

(1) χ が自明な Dirichlet 指標ならば、

$$L(s,\chi) = \zeta(s) \prod_{p \mid N} (1 - p^{-s})$$

となる。ただし、積において p は N を割る素数全体を走る。

(2) χ が非自明な Dirichlet 指標で、χ_0 を χ に付随する原始的 Dirichlet 指標で、その導手を N_0 とする。このとき、

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_0) \prod_{p \mid N \ p \nmid N_0} (1 - \chi_0(p) p^{-s})$$

となる。ただし、積において p は N を割り、N_0 を割らない素数全体を走る。

1.4. **Dirichlet 級数の性質.**

定義 12.

複素数列 $\{a_n\}$ に対して $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ を Dirichlet 級数という。

定理 13.

$f(z) = \sum a_n n^{-s}$ を Dirichlet 級数とする。$f(z)$ が $z = z_0$ で収束すると、$f(z)$ は $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0)$ で収束し、正則関数である。

定理は、次の補題と命題から証明できる。

補題 14.

U を $\mathbb{C}$ の開集合、$\{f_n\}$ を U 上の正則関数列で、U の任意のコンパクト部分集合で $\{f_n\}$ は U 上の関数 f に一様に収束するとする。このとき、f は U 上の正則関数で、$\{f_n\}$ の微分の列 $\{f'_n\}$ は、U の任意のコンパクト部分集合で一様に f の微分 f' に収束する。

$\because$ Cauchy の積分公式

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(w)}{w - z} dw$$

を利用する。一様性から極限と積分が交換することにより、$f(z)$ の正則性が証明できる。微分の一様性は、上の式を z について微分すればわかる。 $\square$

命題 15.

$f(z) = \sum a_n n^{-z}$ を Dirichlet 級数とする。$f(z)$ が $z = z_0$ で収束すると、任意の $0 < \alpha < \pi/2$ に対して、$f(z)$ は領域

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z - z_0) \geq 0,\ \mathrm{Im}(z - z_0) \leq \alpha\}$$

の任意のコンパクト集合上で一様収束する。

証明のため、補題を 2 つ準備する。

補題 16.

$\{a_n\}, \{b_n\}$ を複素数列とする。$A_{l,m} = \sum_{n=l}^{m} a_n, S_{l,m} = \sum_{n=l}^{m} a_n b_n$ とおくと、

$$S_{l,m} = \sum_{n=l}^{m-1} A_{l,n}(b_n - b_{n+1}) + A_{l,m} b_m$$

となる。

$\because$ $S_{l,m} = \sum_{n=l}^{m} (A_{l,n} - A_{l,n-1}) b_n = \sum_{n=l}^{m-1} A_{l,n}(b_n - b_{n+1}) + A_{l,m} b_m$ □

補題 17.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を $0 < \alpha < \beta$ を満たすとし、$z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R}, x > 0)$ とする。このとき、

$$|e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}| \leq \left|\frac{z}{x}\right| (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})$$

となる。

$\because$ $e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} = -z \int_{\alpha}^{\beta} e^{-tz} dt$ なので、$|e^{-tz}| \leq e^{-tx}$ より

$$|e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}| \leq |z| \int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx} dt = \left|\frac{z}{x}\right| (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})$$

となる。 □

$\because$ 命題 15 の証明：a_n を変えることにより、$z_0 = 0$ としてよい。このとき、$\sum a_n$ が収束する。$\mathrm{Re}(z) \geq 0, |z|/\mathrm{Re}(z) \leq k$ で一様収束することを証明する。

a_n を与えられた数列、$b_n = n^{-z} = e^{-z\log(n)}$ とし、補題 16 の記号 $A_{l,m}, S_{l,m}$ を用いると、任意の $\epsilon > 0$ に対してある N が存在して $l.m \geq N$ ならば $|A_{l,m}| < \epsilon$ とできる。このとき、

$$S_{l,m} = \sum_{n=l}^{m} A_{l,n}(e^{-z\log(n)} - e^{-z\log(n+1)}) + A_{l,m} e^{-z\log(m)}$$

である。よって、$z = x + yi$ とおくと、補題 17 より $l, m \geq N$ に対して

$$|S_{l,m}| \leq \epsilon(1 + \left|\frac{z}{x}\right| \sum_{n=l}^{m-1} (e^{-x\log(n)} - e^{-x\log(n+1)}) \leq \epsilon(1 + k(l^{-x} - m^{-x})) \leq \epsilon(1 + k)$$

となる。$f(z)$ は領域 $\mathrm{Re}(z) \geq 0, |z|/\mathrm{Re}(z) \leq k$ で、一様に Cauchy 列になることが示せた。 □

系 18.

数列 $\{a_n\}$ が有界のとき、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で Dirichlet 級数 $f(z) = \sum a_n n^{-z}$ は絶対収束し、正則関数である。

$\because$ $\alpha > 1$ に対して、$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ が収束するから。 □

系 19.

数列 $\{a_n\}$ に対して、部分列 $A_{l,m} = \sum_{n=l}^{m} a_n$ が有界のとき、$\mathrm{Re}(s) > 0$ で Dirichlet 級数 $f(z) = \sum a_n n^{-z}$ は収束し、正則関数である。

$\because$ 正数 $z>0$ に対して、$f(z)$ が収束することをいえばよい。$|A_{l,m}|\leq K$ とする。補題 16 の記号 $S_{l,m}$ を用いて、

$$|S_{l,m}|\leq K\left(\sum_{n=l}^{m-1}\left|\frac{1}{n^z}-\frac{1}{(n+1)^z}\right|+\left|\frac{1}{m^z}\right|\right)\leq K/l^z$$

となるので、$f(z)$ は収束する。 □

1.5. **定理 1 (1) と定理 10 (1) の証明.** $\zeta(s)$ と $L(s,\chi)$ の $\mathrm{Re}(s)>1$ での絶対収束性と非自明な χ に対する $L(s,\chi)$ の $\mathrm{Re}(s)>0$ での収束性は、命題 5、系 18 と 系 19 からわかる。

補題 20.

数列 $\{a_n\}$ を $1+a_n\neq 0\,(\forall n)$ となる数列とする。

(1) 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} 1+a_n$ が収束するための必要十分条件は、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ が収束することである。ここで、無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} 1+a_n$ が収束するとは、極限 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N} 1+a_n$ が 0 でない複素数に収束することを意味する。また、対数の枝は $-\pi<\mathrm{Im}(\log(1+a_n))\leq\pi$ としておく。

(2) 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} 1+a_n$ が絶対収束するための必要十分条件は、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束することである。ただし、無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} 1+a_n$ が絶対収束するとは、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ が絶対収束することを意味する。

$\zeta(s)$ と $L(s,\chi)$ の両者において、補題 20 から、Euler 積表示の右辺が $\mathrm{Re}(s)>1$ のコンパクト集合上で絶対一様収束することが解り、補題 14 から正則関数になる。特に、零点を持たない。素因数分解の一意性から、

$$|\zeta(s)-\prod_{p<N}(1-p^{-s})^{-1}|\leq 2\sum_{n\geq N}|n^{-s}|\leq 2\sum_{n\geq N}|n^{-\mathrm{Re}(s)}|$$

となるので、無限積は $\zeta(s)$ にコンパクト集合上で一様収束する。したがって、$\zeta(s)$ が Euler 積表示を持つことが証明できた。Dirichlet L 関数についても同様である。

以上で、定理 1 (1) と定理 10 (1) の $L(1,\chi)\neq 0$ (5.2 節) を除いて証明できた。

2. 解析接続と関数等式

最初に Γ 関数について簡単に説明し、Riemann ζ 関数の解析接続と関数等式を証明する。Dirichlet L 関数については、証明を省略する。

2.1. Γ **関数.** 複素変数 z に関する積分

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

を考える。これは $\mathrm{Re}(z) > 0$ で積分可能であり、この範囲で正則関数になる。実際、$t = \sigma + i\tau$ とすると、t が 0 に近いとき $|e^{-t}t^{z-1}| \leq t^\sigma$ となり、t が大きいとき $|e^{-t}t^{z-1}| \leq e^{-\sigma/2}$ となるので、積分可能である。

命題 21.

(1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
(2) n が正の整数のとき、$\Gamma(n) = (n-1)!$ となる。

$\because$ (1) 部分積分することにより、

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = \left[-e^{-t}t^z\right]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z)$$

となる。(2) は $\Gamma(1) = 1$ と (1) からわかる。 □

$\Gamma(z)$ は実軸正上では、以下の特徴付けを持つ。証明は省略する。

定理 22.

任意の $x > 0$ に対して、
(i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
(ii) $\Gamma(x) > 0$ かつ $\log\Gamma(x)$ は凸関数
(iii) $\Gamma(1) = 1$
が成り立つ。逆に、(i), (ii), (iii) を満たす実軸正上の実数値関数は Γ 関数の実軸正上への制限 $\Gamma(x)$ である。

系 23.

$\mathrm{Re}(z) > 0$ 上の正則関数で、実軸正上では定理 22 の条件 (i) – (iii) を満たすものは $\Gamma(z)$ である。

定理 24.

$\Gamma(z)$ は積表示

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^\infty \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}$$

を持つ。ただし、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

とする (γ は Euler 定数)。特に、$\Gamma(z)$ は全平面へ有理型関数として解析接続され、全平面で $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を満たす。また、$\Gamma(z)$ は $z = 0, -1, -2, \cdots$ に 1 位の極をもち、極はこれのみである。

$\because$ 右辺を $f(z)$ とする。$(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2} + \cdots$ から、0 になる項 (各 z に対して高々 1 個) を除いて、無限積の逆数はコンパクト集合上で一様絶対収束する。よって、$f(z)$ は 0 または負の整

数に 1 位の極を持つ有理型関数である。

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}e^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{N+1}e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}}=e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\log(N+1)}\to e^{\gamma}\ (N\to\infty)$$

より、$f(1)=1$ となる。任意の複素数 z で

$$\begin{aligned} f(z+1) &= \lim_{N\to\infty}\frac{e^{-\gamma(z+1)}}{z+1}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{z+1}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z+1}{n}} \\ &= \lim_{N\to\infty}e^{-\gamma+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}}\frac{e^{-\gamma z}}{z+1}\prod_{n=1}^{N}\frac{n}{z+n+1}e^{\frac{z}{n}} \\ &= \lim_{N\to\infty}ze^{-\frac{z}{N}}e^{-\gamma+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\log(N+1)}\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{N+1}\frac{n}{z+n}e^{\frac{z}{n}} \\ &= zf(z) \end{aligned}$$

となる。$x>0$ に対して $(\log f(x))''>0$ となるから、系 23 から $f(z)=\Gamma(z)\,(\mathrm{Re}(z)>0)$ となり、$\Gamma(z)$ の解析接続が証明できた。 □

$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ から、Γ 関数の関数等式が得られる。

定理 25.

$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$ が成り立つ。特に $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ である。

2.2. **Gauss 和.** Dirichlet L 関数の関数等式の W_χ に現れる Gauss 和の基本的な性質について解説する。

χ を導手 N の Dirichlet 指標とする。整数 n に対して、和

$$\tau(\chi,n)=\sum_{a=1}^{N}\chi(a)e^{\frac{2\pi i n a}{N}}$$

を、χ と n に関する Gauss 和という。特に、$\tau(\chi)=\tau(\chi,1)$ とおき、χ に関する Gauss 和という。$N>1$ とし、χ を準同型 $\chi:(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{C}^\times$ とみたとき、$\tau(\chi,n)=\sum_{a\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\chi(a)e^{\frac{2\pi i n a}{N}}$ となる。

補題 26.

n を N と素な整数とすると、$\tau(\chi,n)=\overline{\chi}(n)\tau(\chi,1)$ となる。

命題 27.

L,M を互いに素な正の整数とし、整数 s,t に対して $Ls+Mt=1$ とする。命題 4 の全単射により $\chi=(\chi_1,\chi_2)$ とすると、

$$\tau(\chi,n)=\tau(\chi_1,nt)\tau(\chi_2,ns)$$

となる。

∵ 自然な同型 $\mathbb{Z}/LM\mathbb{Z}\xrightarrow{\cong}\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ の逆写像は、$(a,b)\mapsto Mta+Lsb$ で与えられることに注意すると、

$$\begin{aligned} \tau(\chi_1,nt)\tau(\chi_2,ns) &= \sum_{a=1}^{L}\chi_1(a)e^{\frac{2\pi i n t a}{L}}\sum_{b=1}^{M}\chi_2(b)e^{\frac{2\pi i n s b}{M}}=\sum_{a=1}^{L}\sum_{b=1}^{M}\chi(Mta+Lsb)e^{\frac{2\pi i n(Mta+Lsb)}{LM}} \\ &= \sum_{a=1}^{N}\chi(a)e^{\frac{2\pi i n a}{N}}=\tau(\chi,n) \end{aligned}$$

となる。 □

定理 28.

χ を導手 N の原始的指標、n を N と素な整数とすると、$|\tau(\chi, n)| = \sqrt{N}$ となる。

$\because$ 命題 27 において、n が $N = LM$ と素であることと nt と ns がそれぞれ L と M と素であることが同値だから、$N = p^r$ (p が素数, $r \geq 1$) のとき証明すればよい。

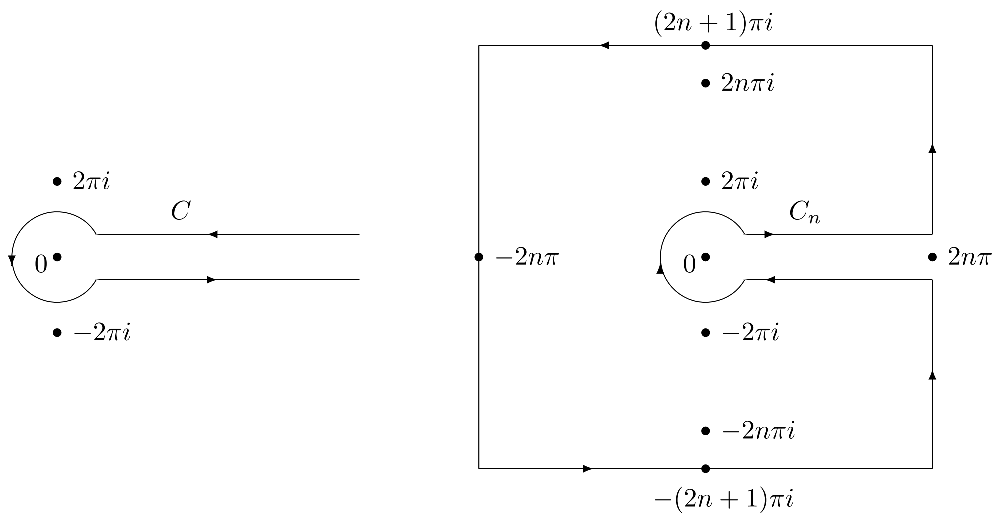
p を素数、$N = p^r$ $(r \geq 1)$ とし、χ を導手 N の Dirichlet 指標とする。補題 26 から $|\tau(\chi, 1)| = \sqrt{p^r}$ を証明すればよい。定義から $\tau(\overline{\chi}, -1) = \overline{\tau(\chi, 1)}$ より、$\tau(\chi, 1)\tau(\overline{\chi}, -1) = p^r$ を証明する。証明において、χ と $\overline{\chi}$ を $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ 上の関数と見なす。

1 の原始 p^h 乗根すべての和は、1 の p^h 乗根すべての和から 1 の原始 p^{h-1} 乗根すべての和となるので、$h \geq 2$ のとき 0 である。また、命題 5 と同様に証明すると、χ は原始指標より $\sum_{b=1}^{p-1} \chi(1 + p^{r-1}b) = -1$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
\tau(\chi, 1)\tau(\overline{\chi}, -1) &= \textstyle\sum_{a \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}} \sum_{b \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}} \chi(a)\overline{\chi}(b) e^{\frac{2\pi i}{p^r}(a-b)} \\
&= \textstyle\sum_{c \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}} \sum_{b \in (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times} \chi(c+b)\overline{\chi}(b) e^{\frac{2\pi i}{p^r}c} \\
&= \textstyle\sum_{h=0}^{r} \sum_{d \in (\mathbb{Z}/p^{r-h}\mathbb{Z})^\times} \sum_{b \in (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times} \chi(1 + p^h d/b) e^{\frac{2\pi i}{p^r}p^h d} \\
&= \textstyle\sum_{h=1}^{r} \sum_{d \in (\mathbb{Z}/p^{r-h}\mathbb{Z})^\times} \sum_{b \in (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times} \chi(1 + p^h b) e^{\frac{2\pi i}{p^r}p^h d} \\
&= \textstyle\sum_{d \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \sum_{b \in (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times} \chi(1 + p^{r-1}b) e^{\frac{2\pi i}{p^r}p^{r-1}d} + \sum_{b \in (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times} \chi(1) e^{\frac{2\pi i}{p^r}p^r 0} \\
&= \textstyle -\sum_{b \in (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times} \chi(1 + p^{r-1}b) + (p^r - p^{r-1}) \\
&= -p^{r-1} \times (-1) + (p^r - p^{r-1}) \\
&= p^r
\end{aligned}
$$

となる。以上で証明ができた。 □

2.3. **解析接続.** 複素平面上の道 C, C_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を次のように定める。



定理 29.

$\mathrm{Re}(s) > 1$ において、

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

が成り立つ。ただし、実軸正の補集合上で、$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}$ $(-\pi < \mathrm{Im}(\log(-z)) < \pi)$ とする。

∵ $z=x+iy$ とおく。$\mathrm{Re}(s)>1$ より、C の 0 の周りの道を十分に 0 に近づけると円周上の積分は 0 に近づくから、

$$\begin{aligned}\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz &= -\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}}{e^x-1}dx+\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}}{e^x-1}dx\\ &= 2i\sin(\pi(s-1))\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx=-2i\sin(\pi s)\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx\\ &= -2i\sin(\pi s)\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx=-2i\sin(\pi s)\sum_{n=1}^\infty n^{-s}\Gamma(s)\\ &= -2i\sin(\pi s)\zeta(s)\Gamma(s)=-2\pi i\zeta(s)/\Gamma(s)\end{aligned}$$

となる。ここで、x が 0 に近いとき $|\sum_{n=N}^\infty e^{-nx}x^{s-1}|=|e^{-(N-1)x}x^{s-1}/(e^x-1)|\sim x^{\mathrm{Re}(s)-2}$ であり、x が大きいとき $|\sum_{n=N}^\infty e^{-nx}x^{s-1}|\geq e^{-(N-1)x}$ なので、$\mathrm{Re}(s)>2$ のとき、積分と無限和は交換可能である。両辺は $\mathrm{Re}(s)>1$ 上の正則関数より、定理が成り立つ。 □

定理 29 の系として Riemann ζ 関数の全平面への解析接続が証明できる。

∵ 定理 1 (2) の証明：定理 29 の右辺の積分は、全平面で定義でき正則関数になる。$\Gamma(1-s)$ は s が正の整数のみ極を持つ。定理 1 (1) で、$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で正則だったので、$\zeta(s)$ は $s=1$ のみ極を持ちうる。

$$\int_C \frac{dz}{e^z-1}=2\pi i$$

より、$\zeta(s)$ は $s=1$ で 1 位の極を持つ。$\Gamma(s)$ の $s=0$ での留数は、定理 25 の関数等式から 1 とわかるので、$\zeta(s)$ の $s=1$ での留数も 1 である。 □

Dirichlet L 関数については次が成り立ち、解析接続や関数等式が証明できる。

定理 30.

χ を導手 N の Dirichlet 指標とする。$\mathrm{Re}(s)>1$ において、

$$L(\chi,s)=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C\sum_{a=1}^N\frac{(-z)^{s-1}e^{(N-a)z}}{e^{Nz}-1}dz$$

が成り立つ。

2.4. **関数等式.** Riemann ζ 関数の関数等式を証明する。積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz$$

を考える。被積分関数の極は、$z=\pm 2m\pi i\,(m=\pm1,\pm2,\cdots,\pm n)$ にあり、その留数は $(\mp 2m\pi i)^{s-1}$ である。よって、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz=\sum_{m=1}^n\left((-2m\pi i)^{s-1}+(2m\pi i)^{s-1}\right)=2\sum_{m=1}^n(2m\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

となる。

次に C_n-C に関する積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n-C}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz$$

を考える。積分路は一部が互いにキャンセルし合い、C_n の箱形の積分路と実軸正の無限大からの道と無限大への道になる。

$s=\sigma$ を負の実数とする。C_n の箱形の道において、$|e^z-1|$ はある定数より大きくなり、$(-z)^{\sigma-1}$ はある正定数 A により $|(-z)^{\sigma-1}|\leq An^{\sigma-1}$ となる。よって、

$$\left|\int_{C_n}\frac{(-z)^{\sigma-1}}{e^z-1}dz\right|\leq An^\sigma$$

となる。n を大きくすると積分の極限は 0 になる。実軸に沿う道に関しては、n が十分大きいと

$$\left|\frac{(-z)^{\sigma-1}}{e^z-1}\right| \leq e^{-\frac{x}{2}}$$

となるので、n を大きくすると積分の極限は 0 になる。したがって、$s=\sigma<0$ のとき、C_n での積分は $n\to\infty$ で $-C$ の積分に収束する。定理 29 と合わせて、$s=\sigma<0$ のとき

$$\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\zeta(\sigma)=2\sum_{m=1}^{\infty}(2m\pi)^{\sigma-1}\sin\left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)=\frac{(2\pi)^{\sigma}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)\zeta(1-\sigma)$$

となる。これは、全平面での正則関数の間の半平面 $s=\sigma<0$ での等式なので、全平面上の等式に延びる。

定理 1 の形の関数等式にするためには、Γ 関数の関数等式と次の倍角の公式を利用する。以上で、Riemann ζ 関数の関数等式が証明できた。

命題 31.

$$\Gamma(z)=\frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

∵ 右辺が、定理 23 の 3 つの性質を満たすことは容易に確かめられる。 □

2.5. ζ **関数の零点.** 関数等式の系として、Riemann ζ 関数の零点に関する情報を得る。これは、$\Gamma(s)$ の極の位置と $\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}(s)>1$ で零点を持たないことからわかる。

定理 32.

(1) $\zeta(s)$ は $s=-2,-4,-6,\cdots$ に零点を持つ。さらに、$|\mathrm{Re}(s-\frac{1}{2})|>\frac{1}{2}$ または $s=0,1$ での零点は、これらのみである。
(2) χ を非自明な原始的 Dirichlet 指標とする。
  (i) χ が偶指標ならば、$L(s,\chi)$ は $s=0,-2,-4,-6,\cdots$ に零点を持つ。さらに、$|\mathrm{Re}(s-\frac{1}{2})|>\frac{1}{2}$ または $s=0,1$ での零点は、これらのみである。
  (ii) χ が奇指標ならば、$L(s,\chi)$ は $s=-1,-3,-5,\cdots$ に零点を持つ。さらに、$|\mathrm{Re}(s-\frac{1}{2})|>\frac{1}{2}$ または $s=0,1$ での零点は、これらのみである。

定義 33.

定理 32 での $\zeta(s)$ または $L(s,\chi)$ の零点これを、**自明な零点**という。自明でない零点のことを**非自明な零点**という。

原始的でない Dirichlet L 関数においては、原始的なものとのずれ $1-\chi(p)p^{-s}$ の零点も自明な零点という。

以上で Riemann 予想を述べる準備が整った。

予想 34.

$\zeta(s)$ の非自明な零点はすべて $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ の上にある。

Riemann 予想は Dirichlet L 関数へも拡張される。

予想 35.

$L(s,\chi)$ の非自明な零点はすべて $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ の上にある。

3. Riemann ζ 関数の特殊値

3.1. Bernoulli 数と Riemann ζ 関数の特殊値. 関数 $F(z) = \dfrac{ze^z}{e^z - 1}$ は、$z = 0$ で正則な関数になる。$z = 0$ の周りでの Taylor 展開を

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$$

とおく。係数 B_n を **Bermoulli 数**という。展開を計算すると次のようになる。

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \cdots$$

命題 36.

B_n は有理数で、$n > 1$ なる奇数に対して $B_n = 0$ となる。

$\because$ $e^z = 1 + z + z/2! + \cdots$ は有理数係数の形式的べき級数になるから、B_n も有理数である。簡単な式の変形で $F(-z) = F(z) - z$ となるので、1 次の部分を除くと $F(z)$ は偶関数である。したがって、$n > 1$ なる奇数に対して $B_n = 0$ である。 □

定理 37.

n を正の整数とすると、$\zeta(1-n) = -\dfrac{B_n}{n}$ となる。

$\because$ $n = 1$ とする。定理 29 から

$$\zeta(0) = -\frac{\Gamma(1)}{2\pi i}\int_C \frac{(-z)^{-1}}{e^z - 1}dz = \mathrm{Res}_{z=0}(\frac{z^{-1}}{e^z - 1}) = -\frac{1}{2} = -B_1$$

である。ここで、$\mathrm{Res}_{z=0}$ は $z = 0$ での留数を表し、$(e^z - 1)^{-1} = z^{-1}(1 + \frac{1}{2}z + \cdots)^{-1} = z^{-1} - \frac{1}{2} + \cdots$ を用いた。$n > 1$ とする。$(e^z - 1)^{-1} = \frac{e^z}{e^z - 1} - 1$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
\zeta(1-n) &= -\frac{\Gamma(n)}{2\pi i}\int_C \frac{(-z)^{-n}}{e^z - 1}dz = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C \left(\frac{z^{-n}}{e^z - 1} - z^{-n}\right)dz \\
&= (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C F(z)z^{-n-1}dz = (-1)^{n+1}(n-1)!\mathrm{Res}_{z=0}(F(z)z^{-n-1}) \\
&= -\frac{B_n}{n}
\end{aligned}$$

となる。最後の変形では $B_n = 0\,(n > 1, \text{奇数})$ を用いた。 □

関数等式から、Riemann ζ 関数の正の偶数での値については、次のことが解る。

定理 38.

m を正の整数とすると、

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m}$$

となる。特に、$\zeta(2m)$ は π^{2m} の有理数倍である。

Riemann ζ 関数の 3 以上の奇数での値については、まだよくわかってない。$\zeta(3)$ についてのみ、有理数でないことが証明されている。また、$\zeta(2m+1)\,(m = 1, 2, 3, \cdots)$ で生成される $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間は無限次元であることも知られている。予想としては、すべてが互いに独立な超越数だと考えられている。

3.2. Dirichlet L 関数の特殊値. χ を導手 N の Dirichlet 指標とする。関数

$$F_\chi(z) = \sum_{a=1}^{N} \frac{\chi(a) z e^{az}}{e^{Nz} - 1}$$

は、$z = 0$ で正則な関数になる。$z = 0$ の周りでの Taylor 展開を

$$F_\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{z^n}{n!}$$

とおく。係数 $B_{n,\chi}$ を指標 χ に関して**一般化された Bernoulli 数**という。$N = 1$ のとき、$F_\chi(z) = F(z)$ で $B_{n,\chi} = B_n$ である。補題 7 と下の補題を用いて展開を計算すると

$$\begin{aligned} B_{0,\chi} &= \frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N} \chi(a) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(N)}{N} & \text{if } \chi \text{ は自明} \\ 0 & \text{if } \chi \text{ は非自明} \end{cases} \\ B_{1,\chi} &= \frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N} \left(\chi(a)a - \frac{N}{2}\chi(a)\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } \chi \text{ は自明} \\ \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{a=1}^{N} \chi(a)a & \text{if } \chi \text{ は非自明} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

補題 39.

N を 2 以上の整数とする。このとき、$\displaystyle\sum_{\substack{1 \le a \le N \\ (a,N)=1}} a = \frac{N\varphi(N)}{2}$ となる。

$\because$ $(a, N) = 1 \Leftrightarrow (N - a, N) = 1$ なので、$2\sum_{1 \le a \le N,\,(a,N)=1} a = \sum_{1 \le a \le N,\,(a,N)=1} (a + (N - a)) = N\varphi(N)$ となる。 $\square$

命題 40.

$\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\chi(1), \chi(2), \cdots, \chi(N))$ とする。

(1) $F_\chi(z) \in \mathbb{Q}(\chi)[[z]]$ となる。特に、$B_n \in \mathbb{Q}(\chi)$ となる。

(2) $N \neq 1$ とすると、$F_\chi(-z) = \chi(-1)F(z)$ となる。特に、χ が偶のとき、奇数 n に対して $B_{n,\chi} = 0$ となり、χ が奇のとき、偶数 n に対して $B_{n,\chi} = 0$ となる。

定理 37 と同様にして、定理 30 を利用して次が成り立つ。

定理 41.

n を正の整数とすると、$L(1 - n, \chi) = -\dfrac{B_{n,\chi}}{n}$ となる。

定理 42.

(1) χ を原始的な偶指標とすると、正整数 m に対して

$$L(2m,\chi)=(-1)^{m+1}\frac{\tau(\chi)}{2}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2m}\frac{B_{2m,\overline{\chi}}}{(2m)!}$$

となる。

(2) χ を原始的な奇指標とすると、非負整数 m に対して

$$L(2m+1,\chi)=(-1)^{m+1}\frac{\tau(\chi)}{2i}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2m+1}\frac{B_{2m+1,\overline{\chi}}}{(2m+1)!}$$

となる。

定理 10 から、非自明な指標 χ に対して $L(n,\overline{\chi})\neq 0\,(n\geq 1)$ となるので、次を得る。

系 43.

(1) χ を $N\neq 1$ である原始的な偶指標とすると、正整数 m に対して $B_{2m,\chi}\neq 0$ となる。
(2) χ を原始的な奇指標とすると、非負整数 m に対して $B_{2m+1,\chi}\neq 0$ となる。

4. 素数定理

$\pi(x)$ を実数 x 以下の素数の個数とする。素数定理とは、$\pi(x)$ を具体的な関数で評価する定理である。A.M.Legendre や C.F.Gauss により予想された $\pi(x)$ に関する問題は、Riemann 関数の $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ での零点と関係があることがわかり、1896 年に de la Vallée Poussin と J.Hadamard は $\mathrm{Re}(s) = 1$ で零点を持たないことを利用して素数定理をそれぞれ独立に証明した。この章では素数定理を紹介する。

4.1. **素数定理とは.** $f(x), g(x)$ を実軸正上の実数値関数とする。このとき、

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x)/g(x) \to 1\,(x \to \infty)$$

と定める。また、$g(x)$ が正値関数のとき

$$\begin{array}{lcl} f(x) = O(g(x)) & \Leftrightarrow & \exists C > 0\,\mathrm{s.t.}\,\forall x\ |f(x)| \le Cg(x) \\ f(x) = o(g(x)) & \Leftrightarrow & f(x)/g(x) \to 0\,(x \to \infty) \end{array}$$

とする。

関数 $\mathrm{Li}(x)$ を

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\mathrm{log}t}$$

と定める。素数定理とは次の定理である。

定理 44.

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x).$$

誤差の評価は研究されていて、Riemann 予想を仮定すると

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}}\mathrm{log}x)$$

となる。

さて、$\mathrm{Li}(x)$ を評価する。

命題 45.

$x \ge 2$ とすると、$\mathrm{Li}(x) = \dfrac{x}{\mathrm{log}x} + O\left(\dfrac{x}{(\mathrm{log}x)^2}\right)$ が成り立つ。特に、$\mathrm{Li}(x) \sim \dfrac{x}{\mathrm{log}x}$ である。

$\because$ 部分積分すると

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}(x) &= \frac{x}{\mathrm{log}x} - \frac{2}{\mathrm{log}2} + \int_2^x \frac{dt}{(\mathrm{log}t)^2} \\ &= \frac{x}{\mathrm{log}x} - \frac{2}{\mathrm{log}2} + \frac{x}{(\mathrm{log}x)^2} - \frac{2}{(\mathrm{log}2)^2} + \int_2^x \frac{2dt}{(\mathrm{log}t)^3} \end{aligned}$$

となるので、$\int_2^x \frac{2dt}{(\mathrm{log}t)^3} = O(\frac{x}{(\mathrm{log}x)^2})$ を示せばよい。$t = e^s$ と変数変換すると、

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{2dt}{(\mathrm{log}t)^3} &= \int_{\mathrm{log}2}^{\mathrm{log}x} \frac{2e^2ds}{s^3} = \int_{\mathrm{log}2}^{\mathrm{log}x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2s^{n-3}}{n!}ds \\ &= -(\mathrm{log}x)^{-2} - 2(\mathrm{log}x)^{-1} + \mathrm{loglog}x + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2(\mathrm{log}x)^{n-2}}{(n-2)\times(n!)} + (\text{定数}) \end{aligned}$$

となる。$x/(\mathrm{log}x)^2 = e^{\mathrm{log}x}/(\mathrm{log}x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{log}x)^{n-2}}{n!}$ の各項の絶対値を比較すると、$n = 1, 2, 3$ を除いて $x/(\mathrm{log}x)^2$ の方が等しいか大きい。$n = 5$ での両者を比較した余りである $\frac{(\mathrm{log}x)^3}{3\times n!}$ を用いると、x が十分大きいとき $n = 1, 2, 3$ 項の和の絶対値より大きくなる。$x/(\mathrm{log}x)^2$ は $x \ge 2$ で常に正だから、$\int_2^x \frac{2dt}{(\mathrm{log}t)^3} = O(\frac{x}{(\mathrm{log}x)^2})$ となる。 $\square$

4.2. $\mathrm{Re}(s) = 1$ **での Riemann ζ 関数.**

定理 (de la Vallée Poussin, J.Hadamard, 1896) **46.**

$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) = 1$ において零点を持たない。

$\because$ F.Mertens (1898) による証明 : $s = 1+i\tau$ $(\tau \in \mathbb{R})$ で、$\zeta(s)$ は零点を持つとする。$s = \sigma+i\tau$ $(\sigma > 1)$ において、

$$\log\zeta(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}p^{-m\sigma}e^{-i\tau\mathrm{log}p^m}$$

なので、

$$\mathrm{Re}(\log\zeta(\sigma+i\tau)) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}p^{-m\sigma}\mathrm{cos}(\tau\mathrm{log}p^m)$$

となる。$3+4\mathrm{cos}\theta+\mathrm{cos}2\theta \geq 0$ に、$\theta = \tau\mathrm{log}p^m$ として適用すると、

$$3\mathrm{log}\,\zeta(\sigma) + 4\mathrm{Re}(\log\zeta(\sigma+i\tau)) + \mathrm{Re}(\log\zeta(\sigma+2i\tau)) \geq 0$$

となる。つまり、

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+i\tau)^4\zeta(\sigma+2i\tau)| \geq 1$$

が成り立つ。$\zeta(s)$ は $s=1$ で一位の極を持つので、$\zeta(\sigma)-\frac{1}{\sigma-1}$ は有界である。また、$\zeta(s)$ は $s = 1+i\tau$ 正則で仮定から $\zeta(1+i\tau) = 0$ なので、ある $A > 0$ が存在して $\sigma = 1$ の周りで $|\zeta(\sigma+i\tau)| < A(\sigma-1)$ となる。よって、上の不等式から $\zeta(\sigma+2i\tau)$ は $\sigma \to 1\,(\sigma > 1)$ で発散することになる。ところが、$\zeta(s)$ は $s = 1$ でのみ極を持つ有理型関数なので、矛盾が生じた。したがって、$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) = 1$ において零点を持たない。 □

4.3. **de la Vallée Poussin による素数定理の証明の概要.** 正の整数上で定義された関数 Λ を

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{if } n \text{ は } p \text{ の正べき} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める。素数定理 44 を証明するためには、次の定理を証明すればよい。

定理 47.

正の実数上の関数 $\psi(x)$ を $\psi(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)$ (n は x 以下の正の整数全体を走る) と定める。このとき、次が成り立つ。

(1) $\pi(x) \sim \dfrac{\psi(x)}{\log x}$.

(2) $\psi(x) \sim x$.

補題 48.

(1) $\psi(x) = \sum_{p\leq x}\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p$ となる。ただし、和において p は x 以下の素数全体を走る。

(2) $x = O(\psi(x))$.

$\because$ (1) 定義より明らか。

(2) n を正の整数、$N = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = (2n)!/(n!)^2$ とする。$N = \prod_{p\leq 2n} p^{k_p}$ (p は $2n$ 以下の素数全体を走る) とすると、

$$k_p = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right]$$

となる。さらに、

$$\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right] = \begin{cases} 0 & \text{if } [2n/p^m] \text{ が偶数} \\ 1 & \text{if } [2n/p^m] \text{ が奇数} \end{cases}$$

となる。ただし、$[x]$ で x の整数部分を表す。特に、$p^m > 2n$ ならば 0 である。よって、$k_p \leq \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right]$ である。ゆえに、

$$\log N = \sum_{p \leq 2n} k_p \log p \leq \sum_{p \leq 2n} \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right] \log p = \psi(2n)$$

となる。$N = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{n} \geq 2^n$ より、$\psi(2n) \geq n \log 2$ となる。$x \geq 2$ に対して $n = [x/2]$ とおくと、

$$\psi(x) \geq \psi(2n) \geq n \log 2 \geq \frac{1}{4} x \log 2$$

となる。 □

∵ 定理 47 (1) の証明：$\left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p < \log x$ より、

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p \leq \log x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \log x$$

となる。ただし、p は x 以下の素数全体を走る。一方、$0 < \delta < 1$ に対して、

$$\begin{array}{rcl} \psi(x) & \geq & \sum_{p \leq x} \log p \geq \sum_{x^{1-\delta} < p \leq x} \log p \geq (1-\delta) \log x \sum_{x^{1-\delta} < p \leq x} 1 \\ & = & (1-\delta) \log x \left[\pi(x) - \pi(x^{1-\delta})\right] \geq (1-\delta) \log x \left[\pi(x) - x^{1-\delta}\right] \end{array}$$

となる。$x = O(\psi(x))$ より、$\pi(x) \log x / \psi(x)$ $(x \to \infty)$ は $1/(1-\delta)$ 以下になる。δ は $0 < \delta < 1$ を満たす任意の実数より、$\pi(x) \sim \psi(x)/\log x$ となる。 □

定理 47 (2) の証明の概略を紹介する。$x > 1$ において定められた関数 $\psi_0(x)$ を

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{if} x \text{ は素数の正のべきでない} \\ \psi(x) - \frac{1}{2}\Lambda(x) & \text{if} x \text{ は素数の正のべき} \end{cases}$$

と定める。明らかに、$\psi_0(x) \sim \psi(x)$ である。よって、$\psi_0(x)$ を評価して、$\psi_0(x) \sim x$ を証明すればよい。

命題 49.

(1) $\mathrm{Re}(s) > 1$ において、$-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}$ となる。

(2) $c > 1$ とすると、$\psi_0(s) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right] \frac{x^s}{s} ds$ となる。

∵ (1) は $\zeta(s)$ の Euler 積表示の対数微分をとる。(2) は (1) と次の補題を適用すればよい。 □

補題 50.

$c > 0$ のとき、$\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{if } y = 1 \\ 1 & \text{if } y = 1 \end{cases}$ となる。

命題 (von Mangoldt, 1895) **51.**

$x > 1$ において

$$\psi_0(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2})$$

となる。ただし、ρ は $\zeta(s)$ の非自明な零点全体を走り、和は $\displaystyle\lim_{T\to\infty}\sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|<T}\frac{x^\rho}{\rho}$ を意味する。また、最後の項は自明な零点での和

$$\sum_\omega \frac{x^\omega}{\omega} = -\frac{x^{-2}}{2} - \frac{x^{-4}}{4} - \frac{x^{-6}}{6} - \cdots = -\frac{1}{2}\log(1-x^{-2})$$

である。

$\because$ ψ_0 は、$c+iT, -S+iT, -S-iT, c-iT\,(c>1, S, T>0)$ を頂点に持つ閉曲線 $C_{S,T}$ 上での積分 $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{S,T}}\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}ds$ の $S, T\to\infty$ なる極限である。留数を計算すると等式を得る。 □

命題 52.

ある $c_1 > 0$ が存在して、$\displaystyle\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} = O\left(xe^{-c_1(\log x)^{\frac{1}{2}}}\right)$ となる。特に、$\psi_0(x) \sim x$ である。

この命題を証明するには、さらなる準備が必要なので概略だけにする。

命題 51 から、$\sum_\rho x^\rho/\rho = o(x)$ を証明すればよい。$\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}(s) = 1$ に零点を持たないので、各非自明な零点 ρ に対して、$|x^\rho| < x$ となる。しかし、和 $\sum_\rho x^\rho/\rho$ は無限和であり、ρ の実部は 1 に近くなるかも知れないから、実部がどれだけ 0 に近いかと非自明な零点の分布を評価しなければならない。

命題 53.

(1) (de la Vallée Poussin, 1899) ある $c_2 > 0$ が存在して、十分大きな T と非自明な零点 ρ で $|\mathrm{Im}(\rho)| < T$ なるものに対して、

$$|x^\rho| < xe^{-c_2\log x/\log T}$$

が成り立つ。

(2) (H.von Mangoldt, 1895) $N(T)$ を $0 < \mathrm{Im}(\rho) < T$ なる非自明な零点の個数とする。このとき、

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

となる。

$\int_0^T \frac{1}{t}dN(t) = O((\log T)^2)$ となるので、ある $A > 0$ に対して

$$\sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|<T}\left|\frac{x^\rho}{\rho}\right| \le Ax(\log T)^2e^{-c_2\log x/\log T}$$

となる。一方、ある $B > 0$ に対して

$$\sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|\ge T}\left|\frac{x^\rho}{\rho}\right| \le B\frac{x(\log(xT))^2}{T}$$

と評価できる。$(\log T)^2 = \log x$ とすると、ある $c_1 > 0$ に対して

$$\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} = O\left(xe^{-c_1(\log x)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

となる。以上が素数定理の証明の大まかなあらすじである。

5. 算術級数定理

この章では、次の Dirichlet の算術級数定理を証明する。

定理 54.

n と a を互いに素な整数とすると、$p \equiv a \pmod n$ となる素数が無限個存在する。

5.1. **密度.**

P を素数全体の集合、A を P の部分集合とする。A が **(解析的) 密度** k を持つとは、

$$\sum_{p\in A}\frac{1}{p^s}/\sum_{p\in P}\frac{1}{p^s} \to k\,(s\to 1)$$

となることをいう。ただし、s は実軸上 $s>1$ で 1 に近づく。

命題 55.

$$\textstyle\sum_{p\in P} p^{-s} \sim \log\frac{1}{s-1}\ (s\to 1)$$

となる。ただし、$f(s)\sim g(s)\,(s\to 1)$ は s が実軸上 $s>1$ で 1 に近づくとき、$f(s)/g(s)\to 1$ を意味する。

$\because$ $\mathrm{Re}(s)>1$ において、Euler 積公式から

$$\log\zeta(s)=\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}1/(kp^{ks})$$

となる。一方、$\zeta(s)$ は $s=1$ で留数 1 の一位の極をもつから、$\zeta(s)-1/(s-1)$ は正則関数である。したがって、$\sum_p\sum_{k=2}^{\infty}1/(kp^k)$ が有界であることを証明すればよい。

$$\sum_p\sum_{k=2}^{\infty}1/(kp^k)\le\sum_p\sum_{k=2}^{\infty}1/p^k\le\sum_p 1/(p^2(1-1/p))=\sum_p 1/p(p-1)\le\sum_{n=2}^{\infty}1/n(n-1)=1$$

となり、有界であることが証明できた。 □

系 56.

A の密度が正ならば A は無限集合である。

密度の定義は他にもある。

$$\sum_{p\in A,p\le x}1/\sum_{p\in P,p\le x}1\to k\,(x\to\infty)$$

により A の**自然密度** と定める。自然密度が存在すると解析的密度が存在して、それらが一致することが知られている。5.3 節の Dirichlet の密度定理の場合は、自然密度も存在する。

5.2. $L(1,\chi)\neq 0$ **の証明.**

定理 57.

χ を導手 N の Dirichlet 指標とする。χ が自明ならば、$L(s,\chi)$ は $s=1$ で 1 位の極を持ち、χ が非自明ならば $L(1,\chi)\neq 0$ となる。

定理の証明の準備のためいくつかの命題を証明する。

命題 58.

N を正の整数とし、

$$\zeta_N(s) = \prod_{\chi} L(s,\chi)$$

とおく。ただし、χ は導手が N の指標すべてを走る。このとき、$\mathrm{Re}(s) > 1$ において、

$$\zeta_N(s) = \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{1}{p^{f(p)s}}\right)^{-g(p)}$$

となる。ただし、$f(p)$ は $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$ の中での p の位数、$g(p) = \varphi(N)/f(p)$ とする。

$\because$ Euler 積表示 $L(s,\chi) = \prod_{p \nmid N} (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$ と次の補題から容易。 $\square$

補題 59.

$p \nmid N$ とすると、$\prod_{\chi} (1-\chi(p)x) = (1-x^{f(p)})^{g(p)}$ となる。

$\because$ $X_N = \{$ 導手が N の Dirichlet 指標 $\}$ とすると、命題 6 から X_N は Abel 群になり、その位数は $\varphi(N)$ である。また、写像 $\widetilde{p} : X_N \to \mathbb{C}^{\times}$ $(\chi \mapsto \chi(p))$ は群の準同型を与える。p の位数が $f(p)$ だから、命題 6 の後半部分から $\widetilde{p}$ の像は 1 の $f(p)$ 乗根からなる乗法群になり、その核の位数は $g(p) = \varphi(N)/f(p)$ となる。$\prod_{\zeta : 1 \text{ の } f(p) \text{ 乗根}} (1-\zeta x) = 1 - x^{f(p)}$ となるから、求める等式が成り立つ。 $\square$

命題 60.

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$ を $a_n \geq 0\,(\forall n)$ なる Dirichlet 級数とする。実数 ρ に対して、$f(z)$ が $\mathrm{Re}(z) > \rho$ で収束し、$z = \rho$ の周りで解析接続できるならば、ある $\epsilon > 0$ が存在して、$f(z)$ は $\mathrm{Re}(z) > \rho - \epsilon$ で収束する。

$\because$ a_n を $a_n n^{-\rho}$ と換えることで、$\rho = 0$ としてよい。$z = 1$ で Taylor 展開すると、

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(1) \frac{(z-1)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum n = 1^{\infty} (-1)^m (\log n)^m a_n n^{-1} \right) \frac{(z-1)^m}{m!}$$

となる。仮定より、この Taylor 展開は適当な ϵ' をとると $|z-1| \geq 1 + \epsilon'$ で収束する。よって、

$$f(-\epsilon') = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^m a_n n^{-1} \right) \frac{(1+\epsilon')^m}{m!}$$

となる。これは正項級数なので、順番を入れ替えると

$$\begin{aligned} f(-\epsilon') &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} (\log n)^m \frac{(1+\epsilon')^m}{m!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-1} n^{1+\epsilon'} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\epsilon'} \end{aligned}$$

となる。Dirichlet 級数は $z = -\epsilon'$ でも収束した。 $\square$

$\because$ 定理 57 の証明 : χ が自明のときは、$L(s,\chi) = \zeta(s) \prod_{p \mid N} (1-p^{-s})$ となるので明らか。

χ が自明でないとする。このとき、$L(s,\chi)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で正則であることは既に見たので、$L(1,\chi) \neq 0$ を示すためには、$\zeta_N(s) = \prod_{\chi} L(s,\chi)$ が $s = 1$ で 1 位の極を持つことを証明すればよい。命題 58 から、$\zeta_N(s)$ は $s = 1$ で高々 1 位の極を持つ解析関数で、すべての係数が 0 以上である Dirichlet 級数で定義されている。$s = 1$ で $\zeta_N(s)$ が極を持たないとすると、命題 60 より $\zeta_N(s)$ は任意の $\mathrm{Re}(s) > 0$ で収束することになる。ところが、すべての p に対して、$s = 1/\varphi(N)$ で

$$(1 - p^{-f(p)/\varphi(N)})^{-g(p)} = (1 + p^{-1/g(p)} + p^{-2/g(p)} + \cdots)^{g(p)} \geq 1 + p^{-1}$$

となるので、$\zeta_N(1/\varphi(N)) = \prod_p (1+p^{-1}) \geq 1+\sum_p p^{-1} = \infty$ である。よって、$\zeta_N(s)$ は $s = 1/\varphi(N)$ で発散する。矛盾が生じたので、$L(1,\chi) \neq 0$ である。 □

5.3. **Dirichlet の密度定理.** 次の Dirichlet の密度定理を証明する。系 56 と合わせると、算術級数定理 54 が成り立つ。

定理 61.

n, a を正の整数で、互いに素とする。P_a を $p \equiv a \pmod{n}$ となる素数の集合とすると、P_a の密度は $1/\varphi(n)$ である。

定理の証明のために次の命題を証明する。

命題 62.

χ を導手が N の Dirichlet 指標とし、$\mathrm{Re}(s) > 1$ 上の関数 $f_\chi(s)$ を

$$f_\chi(s) = \sum_{p \not| N} \chi(p)/p^s$$

とする。ただし、p は N と素な素数全体を走る。このとき次が成り立つ。

(1) χ が自明な指標のとき、$f_(s) \sim \log\frac{1}{s-1}\ (s \to 1)$ となる。
(2) χ が自明でないとき、$s \to 1$ で $f_(s)$ は有界となる。

$\because$ $\mathrm{Re}(s) > 1$ において、

$$\log L(s,\chi) = \sum_p \log(1-\chi(p)/p^s)^{-1} = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \chi(p)^m/mp^{ms} = f_\chi(s) + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_p \chi(p)^m/mp^{ms}$$

となる。$\mathrm{Re}(s) \geq 1$ において、第 2 項は有界だから、$f_\chi(s)$ の $s \to 1$ の挙動は、$\log L(s,\chi)$ の挙動と同じになる。したがって、定理 57 に従う。 □

$\because$ 定理 61 を証明する。$g_a(s) = \sum_{p \in P_a} 1/p^s$ とおくと、

$$g_a(s) = \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\chi:\text{導手 } n \text{ の指標}} \chi(a)^{-1} f_\chi(s)$$

となる。実際、補題 6 から

$$\sum_{\chi:\text{導手 } n \text{ の指標}} \chi(a)^{-1}\chi(p) = \begin{cases} \varphi(n) & \text{if } p \equiv a \pmod{n} \\ 0 & \text{if } p \not\equiv a \pmod{n} \end{cases}$$

となるので、両辺を比較すればよい。ϵ で導手 n の自明な指標を表すとすると、命題 62 から $s \to 1$ において

$$g_a(s) \sim \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\chi:\text{導手 } n \text{ の指標}} f_\chi(s) \sim \frac{1}{\varphi(n)} f_\epsilon(s) \sim \frac{1}{\varphi(n)} \log\frac{1}{s-1}$$

となるので、P_a の密度は $1/\varphi(n)$ である。 □