円盤領域における活性因子・抑制因子系の安定定常解の形状について

宮本 安人[†]

（京都大学数理解析研究所・日本学術振興会特別研究員 PD）

1 序

1.1 知られている結果

非線形解析において，安定定常解すなわち物理的に実現可能である安定なパターンを探すことは，多くの研究者の興味を引き付けてきた．数学的な視点からは，1. 定常解の形状，2. その定常解の安定性，3. 領域の形状，の三つの関係が興味の対象となってきた．本講演では，自然現象のモデル方程式（または系）に多く現れる凸領域における Neumann 境界条件下の反応拡散方程式（系）の安定定常解の形状について考える．

Chafee[C75] は 1975 年に，1 次元区間上の単独反応拡散方程式の非定数定常解は不安定となることを示した．Casten-Holland[CH78] は 1978 年に，保野 [Ma79] は 1979 年に，独立に一般次元の凸領域上の単独反応拡散方程式の非定数定常解は不安定となることを示した．これによって，凸領域上では，単独反応拡散方程式で記述されるモデルは，安定な非自明なパターンが存在しないことが明らかになった．

次の結果を紹介する前に，shadow system について説明する．二つの未知関数 $u(x,t), v(x,t)$ からなる領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ における次の反応拡散系を考える．

$$u_t = D_u\Delta u + f(u,v)\ \ \text{in}\ \ \Omega,\qquad \tau v_t = D_v\Delta v + g(u,v)\ \ \text{in}\ \ \Omega, \tag{FS}$$

$$\partial_\nu u = 0\ \ \text{on}\ \ \partial\Omega,\qquad \partial_\nu v = 0\ \ \text{on}\ \ \partial\Omega.$$

第 2 式の拡散係数を無限大，すなわち $D_v\to+\infty$ とすると，$v(x,t)$ は空間的に一様になると予想される．つまり，空間変数に依存せずに時間変数にのみ依存する関数 $\xi(t)$ を用いると，$v(x,t)\to\xi(t)$ $(D_v\to+\infty)$．そこで，形式的に $v(x,t)=\xi(t)$ とし，第 2 式と定数関数 1 との L^2 内積をとることによって，すなわち Neumann 境界条件の下で両辺を積分することによって，下記の (SS) を得る．この操作は，定数関数 1 と直交する方向，すなわち 2 番目以降の高いモードの成分を全て消去することに対応する．

$$u_t = D\Delta u + f(u,\xi)\ \ \text{in}\ \ \Omega,\qquad \tau\xi_t = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g(u,\xi)dx, \tag{SS}$$

$$\partial_\nu u = 0\ \ \text{on}\ \ \partial\Omega.$$

(SS) を西浦 [N82] に倣い shadow system と呼ぶことにする．(FS) の数学的な解析は一般的に困難であるが，この shadow system は，元の連立方程式 (FS) の性質を受け継ぎつつも $v(x,t)$ が空間

[†] 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町京都大学数理解析研究所
e-mail: miyayan@sepia.ocn.ne.jp

	単独方程式	連立方程式
空間 1 次元	定数解のみ	定数解と単調関数のみ
空間 N 次元 ($N \geq 2$)	定数解のみ	?

表 1: 有界凸領域上，定常解が安定となるための定常解の形状に関する条件

的に一様な関数 $\xi(t)$ に置き換えられているので，第 1 式に関して一様媒質下の単独方程式の手法が使用でき，数学的な解析が比較的容易になる．D_v が大きいとき，(FS) と (SS) はダイナミクスについてもある意味で近いことが示されている [Mi06a].

本題に戻り，定常解の形状と安定性に関する次の結果を紹介する．西浦 [N94] は 1994 年に， 1 次元有界区間上の活性因子・抑制因子系と呼ばれる反応拡散系の shadow system において，u が定数関数と単調関数以外となる定常解 (u, ξ) は，不安定であることを示した（この結果は，後に Ni-Poláčik-柳田 [NPY01] によって，より広いクラスの反応拡散系に対して成立することが示された）．従って非自明な安定定常解は，u が単調関数となるときのみである．表 1 は，これらの結果をまとめたものである．

1.2　活性因子・抑制因子系

多次元領域上の（単独ではない）反応拡散系における安定定常解とその形状の関係は，どのようになっているのだろうか？　いくつかのよく研究されている具体的な系については, (例えば球などの）凸領域の場合においても，安定な非定数定常解の存在が知られている．例えばヒドラと呼ばれる体長 5mm ほどの小さな生物の「頭」の形態形成に関するモデル方程式系である Gierer-Meinhardt 系 [GM72] の shadow system（下記の例 1 ）は，2 次元円盤領域では（中立）安定な境界スパイク解と呼ばれる非定数定常解を持つことが知られている [NTY01]．領域の境界に関して，すべての主曲率が非退化な極大を持つ点が存在するとき，その点にスパイクが位置する境界スパイク解が安定であることも知られている [Mi05]．一方，反応拡散系が勾配系 [JM94] や歪勾配系 [Y02] などの特殊な構造を持つ場合は，多次元においても領域が凸ならば,「抑制因子の方程式の時定数と呼ばれる変数（(SS) における τ に相当）が，勾配系のときは 1，歪勾配系のときはある程度大きい」といった条件の下で，全ての非定数定常解が不安定であることが知られている．特に，Gierer-Meinhardt 系は歪勾配系の例であり，一見，矛盾した結果に思われる．しかし，上記の条件は，時定数 τ が小さい場合を含まず，その場合において，安定な非定数定常解が存在することが予想される．

時定数 τ の役割を説明するため，(FS) における u と v の意味を化学の言葉を用いて直感的に説明したい．活性因子・抑制因子系は，拡散が比較的遅い活性因子 u (short range activator) と拡散が比較的速い抑制因子 v (long range inhibitor) が相互に作用する現象を記述する系で，(SS) は，抑制因子の拡散の強さを無限大とし，瞬間的に抑制因子のみが空間的に一様となる極限をとった系である．活性因子は抑制因子の生産率を増加させるように作用し ($g_u > 0$)，抑制因子は活性因子の生産率を減少させるように作用する ($f_v < 0$)．抑制因子の生産率は，他に反応がなければ自然に減少する ($g_v < 0$)．活性因子は自分自身に対して自己触媒的に作用するような現象を想定しているため，f の u に対する単調性は仮定しない．この f の u に関する非単調性が，さまざまな興味深い現象を呈する原因とみなせる．(FS) が

$$f_v < 0, \quad g_u > 0, \quad g_v < 0 \tag{AI}$$

を満たすとき，活性因子・抑制因子系と呼ぶことにする．以降，(AI) を満たす (SS) を考える．ま

ず、(u, ξ) が定常解ならば、τ の値にかかわらず定常解となることに注意する．$\tau(>0)$ は，活性因子と抑制因子の反応速度の比を表し，τ が大きいときは，抑制因子の反応速度が遅いことに対応する．この場合，(SS) の第 2 式の両辺 τ で割り，$\tau \to +\infty$ とすると ξ が時間変化しないことがすぐにわかる．従って (SS) のダイナミクスは単独方程式のそれと近いことが予想されるので，凸領域においては，非自明解はすべて不安定となる ([CH78, Ma79] の結果と一致する)．一方 τ が小さいときは，抑制因子の反応速度が速いことに対応するので系を安定化すると考えられる．この場合は，非自明解が安定になる可能性がある．ところで，τ が小さいときに安定となる定常解が，τ が大きくなると不安定となるような状況が考えられるが，この場合は通常 Hopf 分岐する．[NTY01, WW03] において Gierer-Meinhart 系の場合の複素固有値が虚軸を横切る様子の詳しい解析がなされている．この時定数による安定性の変化は，単独方程式では現れず，連立方程式に特有の現象であるので，活性因子・抑制因子系に限らず連立方程式においては，どのような時定数の範囲で安定になるかは，重要な視点であると思われる．

1.3 問題設定と主結果

上記の化学現象に基づいた直観的な系のダイナミクスの解釈から，次の問題が提起される．<u>1. 時定数 τ が小さい場合を含み</u>，<u>2. 多次元領域上の</u>，<u>3. 特定の系ではなく広いクラスの（単独ではない）反応拡散系に対し</u>，**「安定ならば，どのような形か？」**すなわち，安定となるための解の形状に関する必要条件を求めたい．具体的には（大きい τ だけではなく)<u>全ての</u>$\tau > 0$ について，解の形状から判定できる不安定となるための十分条件を求める．すると対偶は，<u>ある</u>$\tau > 0$ について，解の形状から判定できる安定となるための必要条件となる．

しかし，この問題に関する結果は，これまでそれほど多くは知られていないように思われる．それは,（数学的）技術的な問題とともに，**「多次元領域内において定義された関数の形状を，どのように数学的に表現するか？」**といった問題が潜在的であり，どのような視点から解析を行ってよいのかすら，定かではないことが，原因の一つであると思われる（凸領域における単独方程式の場合は，安定解が定数解のみであるので，この問題に答える必要がなかった）．ここでは,（これまでにも他の問題でとられていた方法ではあるが）最大点（もしくは臨界点）の位置と個数によって表現することを試みる．

以下，円盤領域（２次元球領域）$B := \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1\}$ における，

$$f_\xi < 0, \quad g_\xi < 0, \quad \text{ある関数 } k(\xi) \text{ が存在し, } g_u(u,\xi) = -k(\xi) f_\xi(u,\xi) \tag{N1}$$

を満たす (SS) の安定定常解の形状について考える．下記が本講演の主結果である．

定理 A[Mi07a, Theorem A]

(u, ξ) を (N1) を満たす (SS) の非一様な定常解とする．ある $\tau > 0$ において，(u, ξ) が安定ならば，u の最大と最少は，B の境界上の点 P, Q でそれぞれ達成し，$\overline{B} \backslash \{P, Q\}$ において，u は臨界点を持たない（従って，u は図 1 のような形状となる）．

拡散係数 D に関する仮定がないことに注意する．D が小さい場合において，特異摂動を利用した解の形状に関する研究は多くなされているが，定理 A は，D が小さい（もしくは大きい）といった仮定をせずとも，**安定解の形状は境界スパイク解に似たものに限る**ことを示している．D がある程度大きいといった条件がついた場合は，u の対称性も示すことができる [Mi07b]（Dirichlet 問題の正値解については Gidas-Ni-Nirenberg[GNN79] の理論によって，球領域において解も球対称となることが知られているが，Neumann 問題において球対称のほかにも線（面）対称などの対称

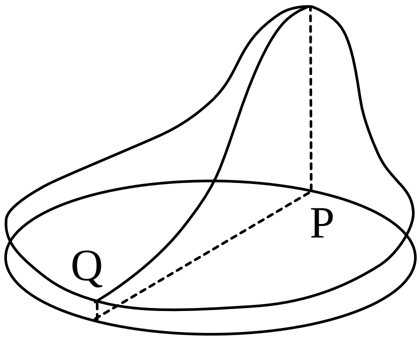

図 1: 定理 A で述べられた安定定常解の u の形状．このような形のみが安定となりえる．

性は least-energy solution 以外の解については多くは知られていないと思われる）．化学現象の言葉で述べると，活性因子がシャーレの縁の 1 点で最大濃度を持つようなパターンのみが安定となり得る．

さらに，定理 A の対偶から次のことがわかる．

系 B[Mi07a, Corollary B]

(u,ξ) を (N1) を満たす (SS) の非一様な定常解とする．u が B の内点において臨界点，すなわち $u_x(x_0,y_0)=u_y(x_0,y_0)=0$ となる点 (x_0,y_0) を持つならば，任意の $\tau>0$ において，(u,ξ) は不安定．

系 B から，u が内部にピークをもつような定常解は，ピークの頂点が臨界点となるので不安定となることが分かる．従って，安定定常解は内部スパイクや内部スポットを持たない．

次に，非線形項の条件 (N1) について考える．(N1) の初めの二つの条件に関しては (AI) に含まれる条件であるので自然である．最後の条件は人工的な印象を受けるが，下記の 2 つの例を含む．

例 1 Gierer-Meinhardt 系の shadow system

$$u_t=\varepsilon^2\Delta u-u+\frac{u^p}{\xi^q}\ \text{ in }\ \Omega,\qquad \tau\xi_t=-\xi+\frac{1}{|\Omega|\xi^s}\int_\Omega u^r dx,$$
$$\partial_\nu u=0\ \text{ on }\ \partial\Omega,$$
$$p>1,\ q>0,\ r>0,\ s\ge 0,\ 0<\frac{p-1}{q}<\frac{r}{s+1},\ p<\begin{cases}\infty & \text{if } N=1,2;\\ \dfrac{N+2}{N-2} & \text{if } N\ge 3,\end{cases}$$

は，常に (AI) を満たす．また，$p=r-1$ ならば，(N1) を満たす．

例 2 FitzHugh-Nagumo 型の非線形項を持つ反応拡散系の shadow system

$$u_t=D_u\Delta u+u(u-a)(1-u)-\gamma\xi\ \text{ in }\ \Omega,\qquad \tau\xi_t=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx-\kappa\xi,$$
$$\partial_\nu u=0\ \text{ on }\ \partial\Omega,$$
$$0<a<1,\ \gamma>0,\ \kappa>0,$$

は，常に (AI) と (N1) を満たす．

2 主結果の証明と関連する問題

2.1 証明に必要な補題

定理 A の証明は，下記の 3 つの補題からなる．

補題 1[Mi06b, Lemma 3.2]

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を区分的になめらかな境界を持つ有界領域とする．(u,ξ) は (N1) を満たす (SS) の定常解とする．第 1 式を u のみの方程式とみた線形化固有値問題

$$D\Delta\varphi + f_u(u,\xi)\varphi = \lambda\varphi \ \text{ in } \ \Omega, \qquad \partial_\nu\varphi = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \tag{1}$$

の第 2 固有値が正ならば，任意の $\tau > 0$ に関して，(u,ξ) は不安定．すなわち，(SS) の線形化固有値問題は，実部が正の固有値を持つ．

補題 2[Mi06b, Lemma 3.4]

領域を円盤（2 次元球）$B = \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1\}$ とする．u を，

$$D\Delta u + h(u) = 0 \ \text{ in } \ B, \qquad \partial_\nu u = 0 \ \text{ on } \ \partial B. \tag{2}$$

の非定数定常解とする．$U(\theta) := u(\cos\theta, \sin\theta)$ とするとき，$\mathcal{Z}[U_\theta(\cdot)](:= \sharp\{U_\theta(\theta) = 0;\ \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}) \geq 3$ ならば，対応する線形化固有値問題の第 2 固有値は正.

補題 3[Mi07a, Lemma C]

領域を円盤（2 次元球）とする．u を，(2) の非定数定常解とする．u が B の内点において臨界点，すなわち $u_x(x_0,y_0) = u_y(x_0,y_0) = 0$ となる点 (x_0,y_0) を持つならば，対応する線形化固有値問題の第 2 固有値は正.

補題 2 と補題 3 において，非線形項 h に関する仮定はなく，拡散係数 D の大小に関する仮定もないことに注意する．

3 つの補題の対偶をとり，それらを組み合わせると，定理 A が示される．また，補題 2 と補題 3 の対偶命題を組み合わせると，拡散係数が小さくなくても円盤領域における非自明な Mountain pass 解（峠の補題によって得られる解）は，図 1 のような形であることもわかる．ただし曲がった部分の微係数など詳しい情報は，この補題だけからでは得ることができない．

2.2 凸領域への拡張

以下，補題 3 について考える．定理 A を凸領域に拡張するとき，次の予想が問題となる．

予想 C(柳田 [Y06])

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界凸領域とする．u を

$$\Delta u + h(u) = 0 \ \text{ in } \ \Omega, \quad \partial_\nu u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega$$

の解とする．もし，Ω の内部において，u が臨界点を持つならば，対応する線形化固有値問題の第 2 固有値は正.

柳田は，予想 C がホットスポット予想 [R74] の非線形版であることを指摘した [Y06]．予想 C が証明されればホットスポット予想は直ちに従う．補題 3 は予想 C の $\Omega = B$ の場合における肯定的解答である．

ところで（非線形ではない）ホットスポット予想は，2 次元有界凸領域で x 軸と y 軸に対称な場合は，肯定的に解決 [BB99, JN00] されている．対称性がない場合は，Lip domain と呼ばれる横長

	線形	非線形
モース指数 0	Neumann ラプラシアンの第 1 固有関数は定数	Casten-Holland と俣野の結果
モース指数 1	ホットスポット予想	予想 C（の厳密には対偶命題）
モース指数 n	第 (n+1) 固有関数はどのような形か？	解はどのような形か？

表 2: 解の形状とモース指数の関係における，予想と既知の結果.

	方程式	領域	解
予想 C	$\Delta u + h(u) = 0$	（2 次元）凸領域	任意の解
Ni-高木の問題	$\varepsilon^2 \Delta u - u + u^p = 0$	（非凸も含む）任意の領域	least-energy solution

表 3: 予想 C と Ni-高木の問題との関係.

の領域に関しては示されている [AB04]．また，対称性のない 2 次元凸領域で，領域がある意味で円盤か矩形に近い場合は筆者によって示された [Mi07c]．一方，2 次元領域で穴のある領域（従って凸領域ではない）で，反例が知られている [BW99, B05]．一般の（2 次元）有界凸領域の場合は成り立つと予想されているが現時点では未解決のようである（証明も反例も知られていないと思われる）．2 次元の場合のみは，凸領域でなくても単連結領域ならば成り立つとの予想もある．

予想 C は，凸領域における半線形楕円型方程式の解の形状とモース指数との関係と捉えると，[CH78, Ma79] の結果のモース指数 1 の場合，もしくは Brunovsky-Fiedler の結果（非線形 Sturm-Liouville 理論）の多次元版と解釈できる．表 2 はこれらの予想と既知の結果をまとめたものである．また，表 3 は，Ni-高木の問題 [NT91, NT93] と予想 C を比較したものである．予想 C では領域は凸領域に制限されるものの，方程式と解の種類は一般的であるので，Ni-高木の問題の（領域の制限を除けば）一般化ともみなせる．

2.3 [GM88] の結果と類似する原因について

Gurtin-俣野 [GM88] は，

$$E[u] := \int_\Omega \left\{ \sigma \left| \nabla u(x) \right|^2 + W(u(x)) \right\} dx$$

を，制限

$$\int_\Omega u(x) dx = m \tag{3}$$

の下で考え，領域 Ω が円盤，円環，直積領域（$[0,1] \times \Omega_1$）などの場合に，global minimizer と local minimizer の形状を研究した．ここで，$\sigma(>0)$, m は定数で，W は二重井戸型ポテンシャルと呼ばれる関数である．例えば，$W'(u) = u(1-u)(u-a)$ $(0 < a < 1)$．$\Omega = B$ のとき，global minimizer は定理 A で記述した形状と同じ形状を持つことが示されている．それは，制限 (3) が第 2 固有値を消去する効果を持っており [Ma05]，補題 1 の対偶から私たちの問題の状況と同じであるからと，解釈できる．

[GM88] で示された global minimizer の形状と定理 A で得られる安定解の形状は，同じであるが，証明方法はまったくと言って良いほど異なる．[GM88] は，global minimizer であることを仮定して，リアレンジメントを用いているが，定理 A では，現実的には確かめることが不可能であるような大域的な仮定（global minimizer）は課さず，安定性の局所的な性質（スペクトル）のみを用いている．

謝辞　柳田英二教授は，予想 C がホットスポット予想の非線形版であることを筆者に指摘してくださいました．この場を借りて御礼申し上げます.

参考文献

[AB04] R. Atar and K. Burdzy, *On Neumann eigenfunctions in lip domains*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 243–265.

[B05] K. Burdzy, *The hot spots problem in planar domains with one hole*, Duke Math. J. **129** (2005), 481–502.

[BB99] R. Banuelos and K. Burdzy, *On the "hot spots" conjecture of J. Rauch*, J. Funct. Anal. **164** (1999), 1–33.

[BW99] K. Burdzy and W. Werner, *A counterexample to the "hot spots" conjecture*, Ann. of Math. **149** (1999), 309–317.

[C75] N. Chafee, *Asymptotic behavior for solutions of a one-dimensional parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions*, J. Diff. Eq. **18** (1975), 111–134.

[CH78] R. Casten and R. Holland, *Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions*, J. Diff. Eq. **27** (1978), 266–273.

[GM72] A. Gierer and H. Meinhardt, *A theory of biological pattern formation*, Kybernetik (Berlin), **12**(1972), 30–39.

[GM88] M. E. Gurtin and H. Matano, *On the structure of equilibrium phase transitions within the gradient theory of fluids*, Quart. Appl. Math. **46** (1988), 301–317.

[GNN79] B. Gidas, W. M. Ni, and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243.

[JM94] S. Jimbo and Y. Morita, *Stability of nonconstant steady-state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions*, Nonlinear Anal. **22** (1994), 753–770.

[JN00] D. Jerison and N. Nadirashvili, *The "hot spots" conjecture for domains with two axes of symmetry*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 741–772.

[Ma79] H. Matano, *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15** (1979), 401–454.

[Ma05] H. Matano, private communication, (2005).

[Mi05] Y. Miyamoto, *Stability of a boundary spike layer for the Gierer-Meinhardt system*, European J. Appl. Math. **16** (2005), 467–491.

[Mi06a] Y. Miyamoto, *Upper semicontinuity of the global attractor for the Gierer-Meinhardt model* J. Diff. Eq. **223** (2006), 185–207.

[Mi06b] Y. Miyamoto, *An instability criterion for activator-inhibitor systems in a two-dimensional ball*, J. Diff. Eq. **229** (2006), 494–508.

[Mi07a] Y. Miyamoto, *An instability criterion for activator-inhibitor systems in a two-dimensional ball II*, J. Diff. Eq. **239** (2007), 61–71.

[Mi07b] Y. Miyamoto, *On the shape of the stable patterns for activator-inhibitor systems in two-dimensional domains*, Quart. Appl. Math. **65** (2007), 357–374.

[Mi07c] Y. Miyamoto, *The "hot spots" conjecture for certain classes of planar convex domains*, preprint, RIMS-1591, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/file/RIMS1591.pdf.

[N82] Y. Nishiura, *Global structure of bifurcating solutions of some reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 555–593.

[N94] Y. Nishiura, *Coexistence of infinitely many stable solutions to reaction diffusion systems in the singular limit*, Dynamics Reported **3** (1994), 25–103.

[NPY01] W. M. Ni, P. Poláčik and E. Yanagida, *Monotonicity of stable solutions in shadow systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 5057–5069.

[NT91] W. M. Ni and I. Takagi, *On the shape of least energy solution to a semilinear Neumann problem*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1991), 819–851.

[NT93] W. M. Ni and I. Takagi, *Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem*, Duke Math. J. **70** (1993), 247–281.

[NTY01] W. M. Ni, I. Takagi and E. Yanagida, *Stability of least energy patterns of the shadow system for an activator-inhibitor model*, Japan J. Indust. Appl. Math. **18** (2001), 259–272.

[R74] J. Rauch, *Five problems: an introduction to the qualitative theory of partial differential equations*, Partial Differential Equations and Related Topics (Jerome A. Goldstein, ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1974, 355–369, Lecture Notes in Mathematics 446.

[WW03] M. Ward and J. Wei, *Hopf bifurcation of spike solutions for the shadow Gierer-Meinhardt model*, European J. Appl. Math. **14** (2003), 677–711.

[Y02] E. Yanagida, *Mini-maximizers for reaction-diffusion systems with skew-gradient structure* J. Diff. Eq. **179** (2002), 311–335.

[Y06] E. Yanagida, private communication, (2006).