交通流モデルの定常解とその漸近展開

金井政宏*
東京大学大学院数理科学研究科

1　講演概要

交通流とは目的を持ったモノの流れを総称する用語で，車や人の交通に限らず生体内で物質輸送を担う微小な分子モーターからネットワーク上のパケットのような無形のものまでと極めて幅広い．そして，これら『モノ』の『目的』には単に方向だけではなく移動時間や輸送効率などの最適化，さらには衝突の回避まで含まれる．このように伝統的な物理の世界観を超えた，すなわちニュートンの運動法則から外れた行動をする粒子を『自己駆動粒子』と称し，自己駆動粒子の多体系についての新たな法則を探求することが現代の交通流研究の主流となっている [1].

交通流研究は，現象の特徴を再現するモデルの開発と得られたモデルの解析によって再帰的に進められる．すなわち，モデルは観測データの再現性によりその妥当性が検証され，モデルの解析により渋滞発生のメカニズムなどシステムの特徴が抽出される．そして，得られた知見から再びモデルの改良が行われる．特に車の渋滞現象に関しては大規模な実験が困難であるためにシミュレーションによる研究が主要な役割を果たす．今回の講演では代表的な交通流モデルの紹介とそれらの解析のために使われている数学についてお話したい.

2　交通流の確率モデル

2.1　TASEP

ここでは一車線交通流の研究の基本となる確率モデルを考える．車は常に同一の方向に後退することなく進み，衝突および追い越しをしないものとしする．このような系は，以下で見るようにセル・オートマトンにより簡潔にモデル化することが出来る．一次元の離散格子を車道と考え，各サイトには最大 1 台の車が入るものとする．各車は右から左に進むものとし，もし左隣のサイトが空いていれば一定の移動確率 p で前方のサイトに進み，そうでなければ同じサイトに留まる（図 1）．このモデルは非対称単純排他過程 (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process) と呼ばれ，非平衡定常系や生体内の物質輸送など様々な分野で基本的なモデルとして用いられている [2, 3].

通常，交通流のセル・オートマトンモデルでは全ての車が同時に更新される一斉更新 (Parallel

* KANAI, Masahiro (kanai@ms.u-tokyo.ac.jp)

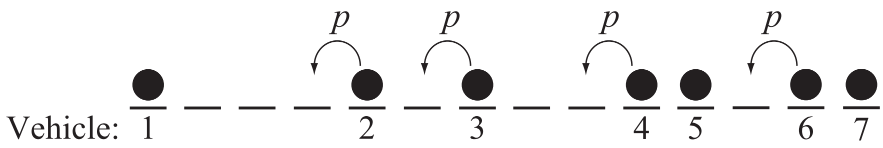

図 1　非対称単純排他過程 (TASEP) の時間発展

Update Rule) が採用される．他に，無作為に 1 台を選んで更新していく無作為逐次更新 (Random Sequential Update Rule) なども考えられるが，実測データとの比較の結果から一斉更新が適しているとされている．

2.2　Zero-range Process

以下では, 境界条件の効果を排除するために, 道路に周期境界条件を課すことにする．TASEP の一般化として，移動確率が車間距離に依存するようなモデルを考えることが出来る．実は，このモデルは相互作用するマルコフ過程として既に Spitzer により研究されていて，Zero-range Process (ZRP) と呼ばれている [4].

ZRP は以下のように定義される．ASEP と同じく一次元格子上でサイト間を移動する粒子系により記述される．ZRP の場合，ASEP と異なり各サイトに複数の粒子が入ることが可能となる．そして，各粒子の移動確率は，その粒子の移動前のサイトに入っている粒子数の関数として与えられる．ZRP と排他過程の対応付けは，ZRP のサイトを排他過程の粒子に対応させ，さらに ZRP の粒子を排他過程での粒子間の空きサイトに対応させることにより実現される（図 2）．ここで，両

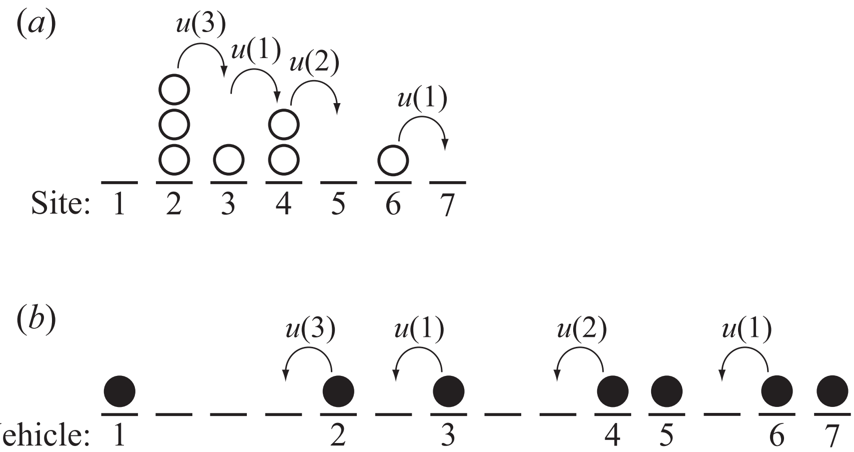

図 2　(a)ZRP を表わす．ZRP では，各サイトに複数の粒子が入ることが可能である．粒子はすぐ隣のサイトに，元のサイトにある粒子数に依存した確率で移動する．(b)ZRP に対応する排他過程．ZRP は車間距離に依存した移動確率を持つ排他過程に読み替えることが出来る．ここで，確率を定数に取れば ASEP に一致する．

モデルの粒子の移動確率は（進行方向は逆転するが）そのまま対応し，特に一定値に取った場合にZRP は ASEP と同等になる．以降，ASEP も ZRP の表示で考えることにする．すなわち，粒子及びサイトといった場合は ZRP のものを指すものとする．

ZRP の最も著しい特徴は，定常状態について，粒子の配置に対する確率測度が厳密に計算されるということである．本講演では，一般の ZRP についての結果を述べるとともに，特に TASEP に対する結果について詳しく検証する．結果だけ述べると，

$$P(\{n_l\}) = \frac{\prod_l f(n_l)}{Z_{LN}}, \qquad Z_{LN} = \sum_{\{n_l\}} \prod_l f(n_l), \qquad f(n) = \frac{1-u(1)}{1-u(n)} \prod_{j=1}^{n} \frac{1-u(j)}{u(j)}$$

となる．ここで，L はサイト数，N は全粒子数で，n_l $(l = 1, \ldots, L)$ は l 番目のサイトにある粒子数を表す．また，和は全ての粒子の配置について取る．$u(n)$ は n 粒子入ったサイトから一つの粒子が隣に移動する確率を表す．そして，幾つかの緩い条件の下に分配関数 Z_{LN} が（Lauricella の）超幾何関数で表され，任意の期待値が原理的には計算可能となる．

一方，特に重要な熱力学極限（$L, N \to \infty$）での展開を考える際，超幾何関数の特異摂動が必要となる [5]．例として ASEP の場合の車の平均速度 $v_{L,N}$ を挙げると，この量は有限の L, N の場合には超幾何関数の比ので表されるが，熱力学極限では初等的な関数で表すことが出来る．

$$\begin{aligned} v_{L,N} &= -\frac{1-p}{L} \frac{{}_2F_1(L, N; 1; 1/(1-p))}{{}_2F_1(L, N; 2; 1/(1-p))} \\ &\to \frac{1-\sqrt{1-4p\rho(1-\rho)}}{2\rho} \qquad (L, N \to \infty) \end{aligned}$$

一般の ZRP の場合にも同様の計算が行えるが，多変数であるために結果は複雑になる．

References

[1] 西成活裕，渋滞学，新潮選書 (2006).

[2] B. Schmittmann and R. K. P. Zia, *Statistical Mechanics of Driven Diffusive Systems* (Academic Press, 1995).

[3] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems* (Springer, 1985).

[4] F. Spitzer, *Interaction of Markov Processes* Adv. Math. **5**, 246 (1970).

[5] M. Kanai, *Exact solution of the zero-range process: fundamental diagram of the corresponding exclusion process*, J. Phys. A 40 (2007) 7127-7138.