

# フェーズフィールドを用いた亀裂進展モデルとその数値解析について

広島国際学院大学 情報デザイン学部 高石武史<sup>1</sup>

## 1 亀裂進展を記述するモデル

著者らは、2次元弾性体の面外変形によるモード III の亀裂進展に対して、数値シミュレーションに適したモデル (phase field model) を提唱した [6],[7] . Griffith の破壊理論 [2] に基づいた Francfort-Marigo のエネルギー [1] を、正則化パラメータ  $\varepsilon$  を持つ相関数によって近似し、非平衡 Ginzburg-Landau 理論の枠組に載せることで、モデルの導出を行う。また、このモデルに対してアダプティブ・メッシュの有限要素法を用いて数値シミュレーションを行い、定性的な亀裂進展が再現できることを示した。

一様な平板内の亀裂進展に対し、安定した数値計算が可能な数理モデルとして次の式を導出した。  $\Omega$  を有界な 2 次元領域で、その境界  $\Gamma$  は区分的に滑らかであるとする。また、 $\Gamma_D$  は正の長さを持つ有限個の連結成分からなる  $\Gamma$  の閉部分集合で、 $\Gamma_N := \Gamma \setminus \Gamma_D$  とおく。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}((1-z)^2 \nabla u) & x \in \Omega, t > 0 \\ \alpha_2 \frac{\partial z}{\partial t} = \left( \varepsilon \Delta z - \frac{\gamma^2}{\varepsilon} z + |\nabla u|^2 (1-z) \right)_+ & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = g(x, t) & x \in \Gamma_D, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & x \in \Gamma_N, t > 0, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & x \in \Gamma, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad z(x, 0) = z_0(x) & x \in \Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

ここで、 $t \geq 0$  は時刻、 $u(x, t)$  は  $x \in \Omega$  における物質の板状面に対して垂直な方向の微小変位である。  $g(x, t)$  は境界  $\Gamma_D$  において与えられた垂直方向の変位である。変数  $z(x, t)$  は亀裂の有無を表す相関数 (phase field) で、 $0 \leq z(x, t) \leq 1$  を満たし、亀裂の無い部分では  $z \approx 0$ 、亀裂のある部分では  $z \approx 1$  となるものである。また、安定な数値シミュレーションを実現するために、微小な時間緩和パラメータ  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  を導入している。加えて、 $z$  の最小空間スケールが  $O(\varepsilon)$  になるよう十分小さい空間正則化パラメータ  $\varepsilon > 0$  を導入する。上の第 1 式は、亀裂部分 ( $z \approx 1$ ) を除いた領域での力のつりあいを表し、第 2 式は、幅  $O(\varepsilon)$  の亀裂が応力の大きさ  $|\nabla u|$  に応じて進展する様子を表している。ここで、定数  $\gamma > 0$  は物質の破壊靱性値 (fracture toughness) で、 $\gamma$  が大きくなる程亀裂は進みづらくなる。また、一度入った亀裂は修復せず、亀裂のままでありつづけるという性質を表す条件： $\frac{\partial z}{\partial t} \geq 0$  を満たすよう、第 2 式の右辺に  $(\ )_+$  を付けてある。ここで、 $(a)_+ = \max(a, 0)$  である。この方程式は、系の全エネルギーを時間依存 Ginzburg-Landau (TDGL) 理論における自由エネルギーとして見ることによってフェーズフィールドモデルの手法 ([4] など) により導かれる。

このモデルの利点は次の通りである。

1. 亀裂進展経路が方程式によって自然に選ばれる。(亀裂発生やサブクラックを再現できる可能性がある。)

<sup>1</sup> 〒 739-0321 広島市安芸区中野 6-20-1, E-mail: t.takaishi@hkg.ac.jp

2. 固定領域  $\Omega$  上の微分方程式なので，数値シミュレーションが容易である．
3. 空間正則化パラメータ  $\varepsilon > 0$  の導入により，応力の大きさ  $|\nabla u|$  が有界にとどまり，数値シミュレーションがしやすい．
4. 物質の破壊靱性値  $\gamma$  に空間分布や履歴を設定するような拡張が可能である．
5. 3次元問題への拡張が可能である．

## 2 亀裂進展の数値シミュレーション

ここで行った数値計算はアダプティブメッシュ有限要素法で行なっている．ここでは，アダプティブメッシュ有限要素法ライブラリ ALBERTA[5] を利用した反応拡散方程式系ソルバー [3] を使用した．正則化パラメータ  $\varepsilon$  を導入しているものの，実際の数値計算では亀裂の両側での値のジャンプが大きいため，効率的に数値計算を行うためにアダプティブメッシュを用いた．

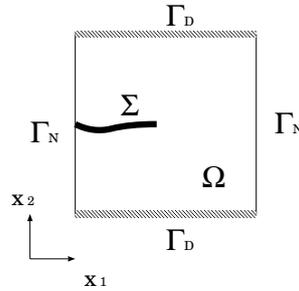


図 1: Computaional domain

モード III 亀裂進展のフェーズフィールドモデル (1) においてパラメータを  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 10^{-3}$ ,  $\gamma = 0.5$  とし，計算領域は Fig. 1 のように， $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ ，ディリクレ境界として  $\Gamma_D = \{(x_1, x_2) | x_1 \in (-1, 1), x_2 = \pm 1\}$  を設定した．境界  $\Gamma_D$  における変位  $u$  は  $g(x, t) = 10x_2t$  ( $x \in \Gamma_D, t \geq 0$ ) として与えた．

まず，板の中央に 1 本の亀裂が入っている場合を考える． $\zeta_0(x) := 1 - e^{-(x_2/\delta)^2} (1 + e^{x_1/\delta})^{-1}$  ( $\delta = 0.1$ ) とおき，初期亀裂  $z_0(x)$  を  $z_0(x) := \zeta_0(x_1 + 0.5, x_2)$  として与えると Fig. 2 のように亀裂の進展が再現される．

2 本の亀裂の対称性の高い条件での進展は実験的に再現が難しいが，このモデルを用いることによりその様子を確認することができる．また，初期亀裂の長さや間隔により破断に至る亀裂の経路の様子が分岐することも確認できる (Fig 3) ．

## 参考文献

- [1] G. A. Francfort and J.-J. Marigo, *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*. J. Mech. Phys. Solids **46**(1998), pp.1319-1342.
- [2] A. A. Griffith, *The phenomenon of rupture and flow in solids*. Phil. Trans. Royal Soc. London **A221** (1920), pp.163-198.

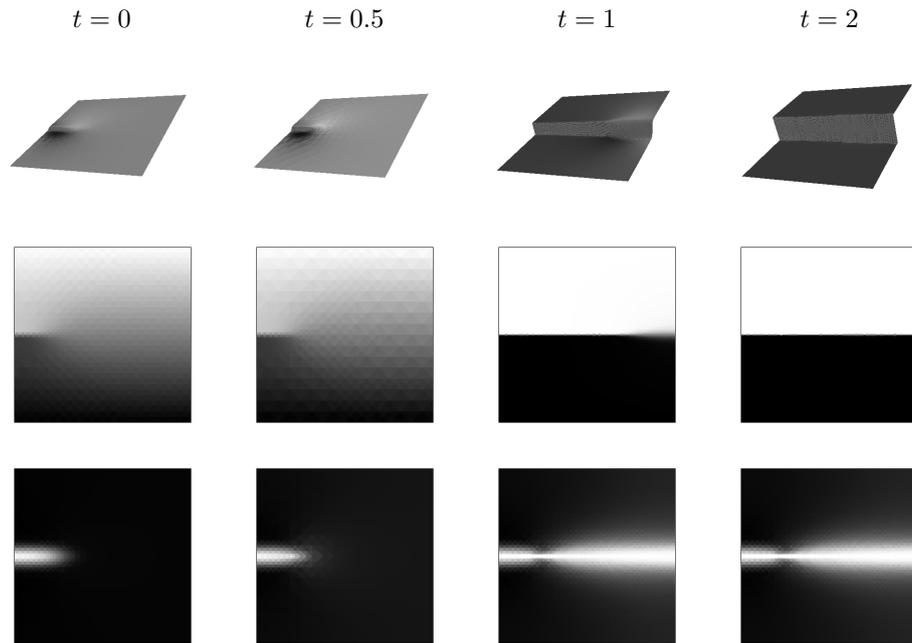
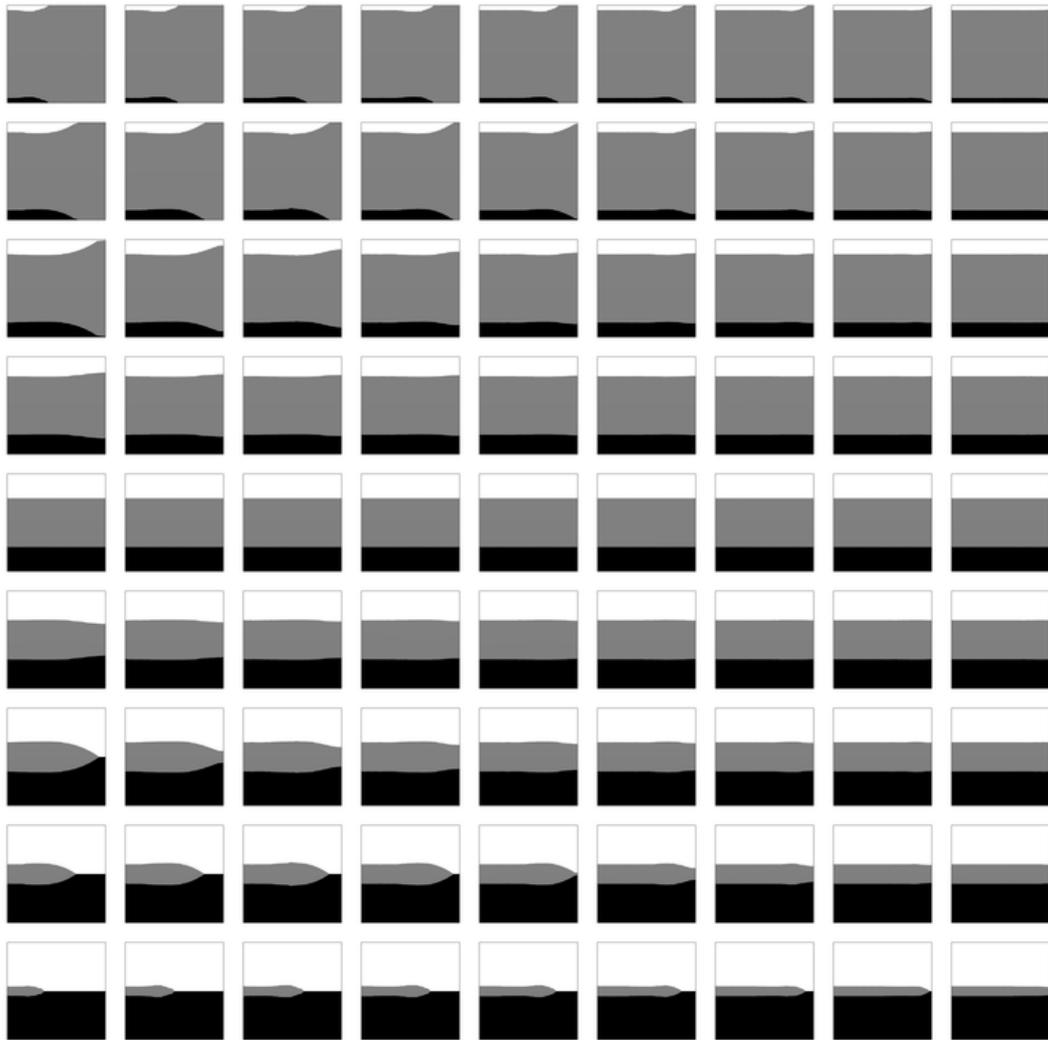


図 2: Birdviews of  $u$ (top),  $u$  (middle) and  $z$  (bottom) in the temporal crack evolution.

- [3] M. Kimura, H. Komura, M. Mimura, H. Miyoshi, T. Takaishi, and D. Ueyama, Adaptive mesh finite element method for pattern dynamics in reaction-diffusion systems. in: Proc. of the Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2005, COE Lecture Note Vol.3, Faculty of Mathematics, Kyushu University ISSN 1881-4042(2006), pp.56-68.
- [4] R. Kobayashi, *Modeling and numerical simulations of dendritic crystal growth*. Physica D **63** (1993), pp.410-423.
- [5] A. Schmidt and K. G. Siebert, Design of Adaptive Finite Element Software. The Finite Element Toolbox ALBERTA, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 42 (2005) Springer-Verlag, Berlin.
- [6] T.Takaishi and M.Kimura, *Phase Field Model for Mode III Crack Growth in Two Dimensional Elasticity*. Kybernetika 45 (2009), pp.605-614.
- [7] 高石武史, "モード III 亀裂進展のフェーズフィールドモデルとその数値計算" 日本応用数理学会 論文誌 第 19 卷 (2009) pp.351-369.



⊗ 3: Profiles of  $u$  at  $t = 2$  on various initial position of top of the crack when 2-crack starts from the same side. Length of cracks (horizontal) v.s. width between 2 cracks (vertical).