令和６年度広島大学理学部

数学科

第３年次編入学試験学力検査問題

筆記試験（微積分，線形代数）（５問）

令和５年９月１日
自　9時00分
至 12時00分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，微積分と線形代数の問題が**計５問**ある。総ページは，表紙を入れて**６**ページである。

2　解答用紙は，**５枚**ある。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入すること。

3　下書き用紙は，各受験者に**２枚**ある。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙と下書き用紙の所定の欄に必ず記入すること。

5　配付した解答用紙，下書き用紙は，持ち出さないこと。

[1] 以下の問いに答えよ。

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ。

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 2z = 0 \right\}$$

の，標準内積に関する正規直交基底を一組与えよ。

(3) 行列

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

に対し，$B\mathbf{x} = \lambda C\mathbf{x}$ をみたす $\lambda \in \mathbb{R}$ および $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ の組をすべて求めよ。

[2] $x = \tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\theta = \tan^{-1} x$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 $x > 0$ に対し，不等式

$$x - \frac{x^3}{3} < \tan^{-1} x < x$$

を示せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \tan^{-1}\left(\frac{n}{n^2 + k^2}\right)$ を求めよ。

[3] 実数 $a \geq -3$ に対し，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -5 & -a & 5 \end{pmatrix}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) A が三つの異なる固有値を持つための a に対する条件を求めよ。

(3) a が (2) の条件を満たすとき，A の各固有値に対する固有ベクトルをそれぞれ一つずつ与えよ。

(4) $a = -1$ とする。$\left\{A^n \mathbf{v}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するような $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ。

［4］ 2 変数関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)\log(x^2 + y^2) & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ における f の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ および2階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ を求めよ。

(2) 2階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上で連続であるか否かを，理由とともに述べよ。

(3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ とおく。$f_x(x,y) = 0$ かつ $f_y(x,y) = 0$ となる D 内の点 (x,y) をすべて求めよ。

［5］ $I=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leq x<1\}$ とする。正の整数 n に対し，連続関数 $f_n:I\to\mathbb{R}$ を

$$f_n(x)=\frac{1-x^2}{1-x^n}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) 左極限 $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f_n(x)$ を求めよ。

(2) 任意の $x\in I$ および任意の正の整数 n に対して

$$\frac{1-x^n}{1-x}\geq nx^{n-1}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 関数 $f:I\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

により定める。任意の $x\in I$ および任意の正の整数 n に対して

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{2}{n}$$

が成り立つことを示せ。