

代数学 A(2009 年度前期,6 月 19 日実施予定) 中間試験模擬問題 (松本 眞)

注: 途中の計算を絶対に消さないこと。途中の計算がないものは採点できません。答案用紙が足りない人は、裏を使うことを断った上で、裏に書いてください。

問題 1. 以下、環とは「単位環」の意味とする。次の集合における和と積は、

*: よく見ると定義されていない

A: 定義されているが環にならない

B: 環だが可換環でない

C: 可換環だが整域でない

D: 整域だが体でない

E: 体である

のいずれか、判定せよ。(証明不要: ごくごく簡単な説明を添えよ。添えてないものは 0 点。)

- (1) $(\mathbb{N}, +, \times)$
- (2) (実数成分二次上三角行列の集合, 行列の和+, 行列の積 \times)
- (3) (実数成分二次正定値行列の集合, 行列の和+, 行列の積 \times)
- (4) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$, 行列の和+, 行列の積 \times)
- (5) $(\mathbb{Q}, +, \times)$
- (6) $(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}], +, \times)$
- (7) (整数係数多項式の集合, +, \times)

問題 2. n を 2 以上の自然数とする。 $X := \{0, 1, 2, \dots, n-1\} = \mathbb{Z}/n$ とおく。 $\sigma : X \rightarrow X$ を、 $a \mapsto 3a \pmod n$ で定義する。

- (1) σ が単射となる必要十分条件を、 n についての言葉であらわせ。
- (2) σ が全単射となるとき、 σ を n 元の置換とみて、 $\sigma \in S_X$ とみなす。
 $n = 8$ のとき、 σ を

$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) & \sigma(7) \end{pmatrix}$$

の形に記述せよ。

- (3) 上記の σ を、巡回分解せよ。
- (4) 上記の σ の位数を求めよ。
- (5) 再び n を一般の自然数とし、(1) の条件が満たされているとする。(2) で定義された $\sigma \in S_n$ の S_n における位数は、 $(\mathbb{Z}/n)^\times$ における 3 の位数と等しいことを示せ。

問題 3. $f : G \rightarrow G'$ を群の単射準同型とする。 $g \in G$ の位数と、 $f(g)$ の位数は等しいことを示せ。

問題 4. 次の写像が、環準同型であるかどうか判定せよ。

- (1) 行列式 $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
- (2) トレース $tr : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (正方行列のトレースとは対角成分の和のこと)
- (3) $\varphi : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$, $f(t) \mapsto f(t)^2$
- (4) $\psi : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$, $f(t) \mapsto f(t^2)$

問題 5. R, S を環、 $f : R \rightarrow S$ を環準同型とし、 $T \subset S$ を S の部分環とする。

- (1) $f^{-1}(T) := \{x \in R \mid f(x) \in T\}$ が R の部分環であることを示せ。

問題 6. 授業などへの感想、要望を述べよ。