

行列を知らない人のための線形代数学入門

松本 眞^{1 2}

平成 27 年 6 月 1 日

¹広島大学理学部数学科 m-mat@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

²このノートは以下のページにある:<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/TEACH/teach.html>

目次

| | |
|-----------------------------|----------|
| 第 1 章 線形ということ | 3 |
| 1.1 線形性と比例 | 3 |
| 1.1.1 比例とその定義域の高次元化 | 3 |
| 1.1.2 行列の記法 | 4 |
| 1.1.3 n 次元縦ベクトル空間 | 4 |
| 1.1.4 比例の値域の高次元化 | 5 |
| 1.1.5 行列 | 5 |
| 1.2 行列 | 7 |
| 1.2.1 行列：具体例から | 7 |
| 1.2.2 行列の積 | 9 |
| 1.2.3 回転行列の積と加法定理 | 11 |
| 1.2.4 行列と線形写像 | 11 |
| 1.2.5 線形写像 | 12 |
| 1.2.6 逆行列： 2×2 の場合 | 13 |
| 1.2.7 消去法と行列の基本変形（実例で） | 15 |
| 1.2.8 消去法と行列の基本変形（より正確に） | 19 |
| 1.3 線形空間と線形写像 | 21 |
| 1.3.1 (抽象) 線形空間 | 21 |
| 1.3.2 線形写像 | 23 |
| 1.4 基底と表現行列 | 24 |
| 1.4.1 一次結合 | 24 |
| 1.4.2 生成と一次独立性 | 24 |
| 1.4.3 基底と表現行列 | 25 |
| 1.5 基底と次元 | 27 |

第1章 線形ということ

著者の座右の銘は「前言撤回」である。

1.1 線形性と比例

ここでは、「数」と言ったら実数を指すこととする。線形代数がその威力を発揮するのは、むしろ複素数の範囲だったり「有限体」だったり「多項式環」だったりするのだが、数学科の3年生ぐらいになるとそれがわかるかも知れない。

1.1.1 比例とその定義域の高次元化

一次関数

$$y = f(x) = ax \quad (1.1)$$

があるとき、 x と y は比例関係にある、と習った。

線形写像とは、これの高次元版である。線形代数とは、「高次元の比例関係」を扱う分野である。

具体的に述べよう。 \mathbb{R} で実数の集合を表す：

$$\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < \infty\}$$

である。(1.1) は、 \mathbb{R} から \mathbb{R} への関数である。これの、二変数版を考える。すぐに思いつるのは、

$$z = f(x, y) = ax + by \quad (1.2)$$

である。これは、「二次元空間から一次元空間への線形写像」と呼ばれる。3変数版なら

$$w = f(x, y, z) = ax + by + cz \quad (1.3)$$

である。ここに、 a, b, c は実定数であり、 x, y, z が自由変数であり、 w が従属変数である。

n を自然数とする。 n 変数版を考えるならば、実定数 a_1, \dots, a_n を決めて、自由変数を x_1, \dots, x_n とし、従属変数 y を

$$y = f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \quad (1.4)$$

で与えることにより、 n 次元空間から1次元空間への線形写像ができる。

1.1.2 行列の記法

(1.4) を、次のように書きあらわす。

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = (a_1a_2 \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

「比例定数」

$$(a_1a_2 \cdots a_n)$$

と、「変数」

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

に分けて書いたということになる。

定義 1.1.1. (1.2) のように、ある (比例) 定数 (a_1, \dots, a_n) により

$$y = f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

と表される n 変数関数を、**線形関数**という。「 y は、 x_1, \dots, x_n から線形に定まる」ともいう。

1.1.3 n 次元縦ベクトル空間

定義 1.1.2. $(a_1a_2 \cdots a_n)$ のように、 n 個の数を横に並べてかっこでくくったものを n 次元横ベ

クトルという。 n 次元横ベクトルの集合を \mathbb{R}^n で表し、 n 次元横ベクトル空間とよぶ。

のように、縦に n 個数をならべてかっこでくくったものを n 次元縦ベクトルという。それらをすべて集めた集合を、 n 次元縦ベクトル空間という。おなじ記号 \mathbb{R}^n であらわすので紛らわしい。

例 1.1.3. \mathbb{R}^2 は、高校でいう xy 平面と「おなじ」ものである。 \mathbb{R}^3 は、3次元空間 (xyz 空間) と「おなじ」ものである。

注意 1.1.4. \mathbb{R}^n を、 n 次元空間と言ったり、 n 次元ユークリッド空間と言ったりする。なぜ「ユークリッド」というかは、google 先生に聞いてほしい。

このノートでは、 \mathbb{R}^n と書いたら特に断らない限り n 次元縦ベクトル空間を表す。

1.1.4 比例の値域の高次元化

§1.1.1 では、比例関係 $y = ax$ において定義域（自由変数）を多変数化した。ここでは、値域（従属変数）を多変数化してみる。例えば、値域を二変数化するなら、

$$y = ax, z = bx \quad (1.6)$$

となる。ここで、 x が自由変数、 y, z が従属変数で、 a, b がそれぞれの比例定数である。これを、「行列記法」で書くと、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x. \quad (1.7)$$

この式は、(1.6) とおなじことを意味している。

より一般に、 n 個の従属変数 y_1, y_2, \dots, y_n が、ひとつの自由変数 x により比例関係で定まっているとき、すなわちある定数 a_1, a_2, \dots, a_n が存在して

$$y_1 = a_1x, \dots, y_n = a_nx$$

という式で定まっているときに、「ベクトル $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ は x から線形に定まっている」という。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} x$$

と（行列記法では）表す。

1.1.5 行列

定義域が n 個の（自由）変数 x_1, x_2, \dots, x_n からなり、値域が m 個の（従属）変数 y_1, y_2, \dots, y_m からなる関数を考える。このとき、 y_1 が x_1, \dots, x_n から定義 1.1.1 の意味で線形に定まるものと仮定すると、定義から

$$y_1 = (a_1 a_2 \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表せる。さらに、 y_2 も x_1, \dots, x_n から定義 1.1.1 の意味で線形に定まるものと仮定すると、定義から

$$y_2 = (a'_1 a'_2 \cdots a'_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

の形に表せる。ここに、'をつけたのは、 a_1 と a'_1 は違う数かも知れないからである。

y_3, y_4 を表すには a''_1, a'''_1 が必要になってがちが開かない。そこで、最初から a の添え字を二重にしておけばよかったと反省し、次のようにする。

$$y_1 = (a_{11}a_{12} \cdots a_{1n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$y_2 = (a_{21}a_{22} \cdots a_{2n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

中略

$$y_m = (a_{m1}a_{m2} \cdots a_{mn}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

こうして、 n 個の自由変数から、 m 個の従属変数が線形に定まるときには、「比例定数に当たるもの」 a_{ij} が $m \times n$ 個必要となる。

そこで、前のように「従属変数」「比例定数」「自由変数」をまとめて書くとするならば、次のような記法をするのが妥当と思える。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

この、 $m \times n$ 個数を長方形に並べたものを、 $m \times n$ 行列、または単に行列という。上の式は、 $m \times n$ 行列を n 次元縦ベクトルに左から掛け算した結果が、 m 次元縦ベクトルであるということを示している。

問題 1.1. 平成26年度以前の高校の数学Cの教科書の行列の説明を見て、上の説明と比べよ。

また、行列とベクトルの積を高校の教科書から探し、5つ以上自分で計算してみよ。

1.2 行列

1.2.1 行列：具体例から

例 1.2.1. つる亀算。つるが x 匹、亀が y 匹いる。頭の数合計を z 頭とし、足の数合計を w であらわす。

$$\begin{aligned} z &= x + y \\ w &= 2x + 4y \end{aligned} \tag{1.9}$$

である。これを、(1.5) のように書くのであれば

$$\begin{aligned} z &= (1 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ w &= (2 \ 4) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。(1.8) の記法を用いるならば

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

である。例えば、 $x = 7, y = 3$ であれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 1 \times 3 \\ 2 \times 7 + 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \end{pmatrix}$$

である。

より一般に、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

である。左辺を、行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の積という。

例 1.2.2. つるかめかぶとむし算。(筆者は、小学生のときこの問題を考え出した記憶があるのだが、昔からあるようである。)

つるが x 匹、亀が y 匹、かぶとむしが z 匹いる。頭数を u 、足の数を v とすると

$$\begin{aligned} u &= x + y + z \\ v &= 2x + 4y + 6z \end{aligned} \tag{1.11}$$

である。(1.8) の記法を用いるならば

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

である。右辺を「 2×3 行列と 3 次元ベクトルの積」という。その計算結果は $\begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x + 4y + 6z \end{pmatrix}$ なる 2 次元ベクトルである。一般に、 $m \times n$ 行列と n 次元ベクトルの積は m 次元ベクトルになる。

記号 $:=$ で、「左辺を右辺で定義する」ことを表す。

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix}$$

と書いたら、「 A という一文字で、 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix}$ という 2×3 行列を表すことにする」という意味になる。

このとき、3次元横ベクトル $(a \ b \ c)$ を A の第1行といい、 $(e \ f \ g)$ を A の第2行という。2次元縦ベクトル

$$\begin{pmatrix} a \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ g \end{pmatrix}$$

を、それぞれ A の第1列、第2列、第3列という。第 i 行と第 j 列の交わる場所の数を、行列の (i, j) 成分という。

より一般に、 $m \times n$ 行列の第1行、...、第 m 行が同様に定義される。列も同様。 (i, j) 成分も同様。

縦ベクトルを太字 \mathbf{x} で表すことがよくある。次元にかかわらず同じ \mathbf{x} で表す。たとえば、

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

のとき、

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ ex + fy + gz \end{pmatrix}$$

である。

例 1.2.3. (回転行列) 2次元ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

を考える。これを角度 θ で反時計まわりに回転させたベクトルを \mathbf{u} とすると、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} (\cos \theta)x - (\sin \theta)y \\ (\sin \theta)x + (\cos \theta)y \end{pmatrix}$$

となることがわかる。行列を使うと

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

と表せる。ここに現れた 2×2 行列を、**角 θ の回転行列**という。

定義 1.2.4. θ を実数とする。

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

なる 2×2 行列を角 θ の回転行列といい、 $R(\theta)$ で表す。(通常 radian 記法を使う。)

1.2.2 行列の積

写像と合成

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ をそれぞれ 2×2 行列とする。2次元ベクトル \mathbf{x} に対して、 $P\mathbf{x}$ を計算すると、これは2次元ベクトルになる。そこで、これに左から A を掛けることで、

$$A(P\mathbf{x})$$

なる2次元ベクトルが得られる。

ここから脱線

定義 1.2.5. 今後にも必要になるから、**写像** (または、まったく同じ意味で**関数**ともいう) の概念を定義しておく。 S, T を集合とする。 S の元 (要素ともいう) $s \in S$ に対して、 T の元を対応させる手続きのことを S から T への写像 (mapping) という。関数 (function) ともいうので、しばしば $f: S \rightarrow T$ と表される。 s に対応する T の元を $f(s)$ と書く。 s に対して $f(s)$ が定まることを、 $s \mapsto f(s)$ と表す。

f が集合 S から集合 T への写像であることをあらわすのに、

$$f: S \rightarrow T, \quad S \xrightarrow{f} T$$

などと表す。この状況を、ひとつの図 (図式、diagram という) で表して

$$\begin{array}{ccc} f: & S & \rightarrow & T \\ & s & \mapsto & f(s) \end{array}$$

のように記述する。 S を f の定義域 (domain) あるいは始集合、 T を f の値域 (codomain) あるいは終集合と言う。しっぽなしの矢印 \rightarrow は、定義域と値域を結ぶ記号であるのに対し、しっぽ付きの矢印 \mapsto は、「この元をこの元に写す」ということを表している。

例 1.2.6. $f(x) = x^2 + 1$ は、 \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像である。高校で2次関数と教わるものである。この写像は、 $x \mapsto x^2 + 1$ と表せる。

例 1.2.7. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対し、上の 2×2 行列 A を用いて $A\mathbf{x}$ を対応させる手続きは、写像

$$\begin{array}{ccc} f_A: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbf{x} & \mapsto & A\mathbf{x} \end{array}$$

を与える。 P に対しても、 $f_P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f_P(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ を与える。

f の添え字に A とか P とか着くだけで違和感があるかと思う。筆者もそうだったのだが、すぐに慣れた。

定義 1.2.8. $f: S \rightarrow T, g: T \rightarrow U$ なる二つの写像が与えられたとき、その合成写像 $g \circ f: S \rightarrow U$ を、任意の $s \in S$ に対して

$$(g \circ f)(s) = g(f(s))$$

となる写像として定義する。

$A(P\mathbf{x}) = f_A(f_P(\mathbf{x})) = f_A \circ f_P(\mathbf{x})$ である。

ここまで脱線でした。

本題に戻る。 $A(P\mathbf{x})$ を計算してみる。

$$P\mathbf{x} = \begin{pmatrix} px + qy \\ rx + sy \end{pmatrix}$$

であるから、

$$A(P\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} px + qy \\ rx + sy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(px + qy) + b(rx + sy) \\ c(px + qy) + d(rx + sy) \end{pmatrix}$$

である。最後の式を整理すると

$$\begin{pmatrix} (ap + br)x + (aq + bs)y \\ (cp + dr)x + (cq + ds)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから、次のように行列の積を定義すると良い。

定義 1.2.9. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対し A と B の積 AB を

$$AB = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

で定義する。

$$A(P\mathbf{x}) = (AP)\mathbf{x}$$

となるように AP が定義されたことになる (先の計算から)。

注意 1.2.10. 行列の積の定義の覚え方。 AP の第1列は、 $A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ と一致している。すなわち、 $A \times$ 「 P の第1列」である。 AP の第2列は、 $A \times$ 「 P の第2列」である。言い換えると、「行列と縦ベクトルの積」の計算を2度やれば行列と行列の積は求まる。

では、 A が 2×2 行列で P が 2×3 行列であるような場合はその積はどう定義したら良いか。 \mathbf{x} を3次元ベクトルとすると、 $P\mathbf{x}$ は2次元ベクトルである。したがって、 $A(P\mathbf{x})$ は2次元ベクトルである。

実は、行列の積 AP を、

$$A(P\mathbf{x}) = (AP)\mathbf{x}$$

が成り立つように定義できる。ここで、 AP は 2×3 行列である。

定理 1.2.11. A を $l \times m$ 行列、 P を $m \times n$ 行列とする。すると、ある $l \times n$ 行列 C が存在して、

$$A(P\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$$

が任意の n 次元ベクトル \mathbf{x} に対して成り立つようにできる。このような C はただ一つである。この C を、行列 A と P の積といい、 AP で表す。

1.2.3 回転行列の積と加法定理

二次元ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を反時計回りに θ 回転して得られるベクトル \mathbf{u} を求めよう。まず $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ を回転して得られるベクトルは $\begin{pmatrix} (\cos \theta)x \\ (\sin \theta)x \end{pmatrix}$ である。次に、 $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ を回転して得られるベクトルは $\begin{pmatrix} -(\sin \theta)y \\ (\cos \theta)y \end{pmatrix}$ である。 \mathbf{u} はこれらの和を取ればよく、したがって

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} (\cos \theta)x \\ (\sin \theta)x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\sin \theta)y \\ (\cos \theta)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるのであった。(平行四辺形は回転しても平行四辺形であることを使っている。) 定義 (1.2.4) を用いれば

$$\mathbf{u} = R(\theta)\mathbf{x}$$

と表せる。

命題 1.2.12.

$$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta).$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

を得る。

証明. $R(\beta)\mathbf{x}$ は \mathbf{x} を β 回転させたもの。 $R(\alpha)(R(\beta)\mathbf{x})$ はそれを α 回転させたもの。先の定理から、それは $(R(\alpha)R(\beta))\mathbf{x}$ 。図形的意味から、それは $R(\alpha + \beta)\mathbf{x}$ と等しい。これが任意の \mathbf{x} で成立するから

$$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$$

が成立する (注: $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ が任意の \mathbf{x} について成立すれば、 $A = B$ となることがわかる。例えば、 \mathbf{x} として、 i 行の成分が 1 で残りが 0 であるようなものを取ると、 A と B の第 i 列が一致することがわかる。) \square

注意 1.2.13. 上の命題 (1.2.12) で、左辺の行列の成分と右辺の行列の成分とを比べると、 \sin , \cos の加法定理を得る。この加法定理の証明には、「行列の積の性質」しか使っていない。

1.2.4 行列と線形写像

定理 1.2.11 によれば、行列 AP は

$$A(P\mathbf{x}) = (AP)\mathbf{x}$$

がすべての \mathbf{x} に対して成り立つように定義される。しかし、 AP の具体的計算法はこの定義からはあまりあきらかではない。

命題 1.2.14. A を $l \times m$ 行列、 P を $m \times n$ 行列としたとき、

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

と書く。ここに、 \mathbf{p}_i は P の第 i 列からなる m 次元たてベクトルである。このとき、

$$AP = A \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & \cdots & A\mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

が成立する。すなわち、積 AP の i 列目は $A\mathbf{p}_i$ となる。

証明する必要があるが、ちょっと後回しにしたい。

問題 1.2. 行列と行列の積の例を、テキストや古い高校の教科書から探して5つ以上自分で計算してみよ。

1.2.5 線形写像

\mathbb{R}^n で n 次元縦ベクトルの集合 (n 次元数ベクトル空間ともいう) を、 \mathbb{R}^m で m 次元縦ベクトルの集合 (m 次元数ベクトル空間ともいう) を表す。

$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ に対し、その和 $\mathbf{x} + \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ を成分ごとの和で定める。

$\lambda \in \mathbb{R}$ に対し、 \mathbf{x} の λ 倍 $\lambda\mathbf{x}$ を、全ての成分をそれぞれ λ 倍して得られる n 次元ベクトルを表す。

定義 1.2.15. 写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が**線形写像**であるとは、次の公理を満たすこと。(教科書17ページ。)

任意の $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し

1. $f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}')$
2. $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$.

注意 1.2.16. 1. まさに、比例という関係の高次元化に見えませんか？

2. (1) から (2) が導けそうであるが、実は選択公理というものを認める限り導けません。

実は、行列を掛けるということと、線形写像ということは、この段階では全く同じものである。

定義 1.2.17. $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ で、1番目の成分が1で他が0の縦ベクトルを指す。 $\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^n$ で、2番目の成分が1で他が0の縦ベクトルを指す。(中略) $\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ で、 n 番目の成分が1で他が0の縦ベクトルを指す。 \mathbf{e}_i を標準単位ベクトルということがある。 $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ を標準基底ということがある。が、まだ基底の概念を導入していないので説明がせつかちすぎである。

定理 1.2.18. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とする。このとき、 $\mathbf{p}_1 := f(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{p}_2 := f(\mathbf{e}_2)$, 中略、 $\mathbf{p}_n := f(\mathbf{e}_n)$, とおき、

$$P := \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

と置くと、 P は $m \times n$ 行列であり、次がなりたつ。

$$f(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}.$$

ここに、 \mathbf{x} は全ての \mathbb{R}^n の元。

問題 1.3. 上の定理の証明を与えよ。ヒント： $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ である。これを f に食べさせると、線形性を繰り返し使えば

$$f(\mathbf{x}) = x_1f(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nf(\mathbf{e}_n)$$

である。右辺は $P\mathbf{x}$ である。

上の証明から、すべての線形写像は行列で掛けることがわかった。 P を f の表現行列という。このような P は f に対してただ一つ定まる。逆に、行列 P が与えられると $f(\mathbf{x}) := P\mathbf{x}$ は線形写像を与える。

問題 1.4. 命題 1.2.14 の証明を与えよ。ヒント： (AP) の一列目は、 $(AP)\mathbf{e}_1 = A(P\mathbf{e}_1) = A\mathbf{p}_1$ である。これを各列に繰り返せば結果は得られる。

行列の和 : A, B がともに $m \times n$ 行列であるとき、成分ごとの和として $A+B$ が定義される。

$$(A+B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}$$

が成り立つ。行列の差も同様にして定義される。

0 行列、単位行列 すべての成分が 0 であるような $m \times n$ 行列をゼロ行列 (零行列) といい、 O で表す。 $A+O = A = O+A$ が成り立つ。一方で、積について $I_nA = A$ となるような行列 I_n を考えると、これはサイズの計算から $n \times n$ 行列、すなわち **正方行列** でなければならぬ。各 (i, i) 成分 (i 次対角成分ともいう) が 1 で、対角成分以外の成分が 0 であるような n 次正方行列を n 次単位行列 (unit matrix) といい I_n や E_n や単に I, E であらわす。 A が $n \times m$ 行列のとき $I_nA = A$, B が $l \times n$ 行列のとき $BI_n = B$ となる。

結合律 行列のサイズが合って掛け算できるときには、

$$(AB)C = A(BC)$$

が成立する (結合律という)。なぜか、と言え、関数の合成に対して

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

が成立するからである。(各写像が行列で与えられる線形写像であるときを考えればよい)。

1.2.6 逆行列 : 2×2 の場合

A を n 次正方行列とする。 $PA = AP = I_n$ となるような n 次正方行列 P が存在するとき、 P を A の**逆行列** といい、 A^{-1} であらわす。

問題 1.5. 他に、 $QA = AQ = I_n$ となるような行列があれば $Q = P$ となることを示せ。

次は、昔は高校でならった。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つ必要十分条件は、その**行列式** $\det A := ad - bc$ が 0 でないこと。そのとき、逆行列は $1/(\det A) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ で与えられる。

問題 1.6. 上の事実（逆行列がないことと行列式の関係、逆行列の公式）を証明せよ。

注意 1.2.19. 3×3 行列またはそれ以上のサイズの行列においても、行列式 $\det A$ は定義される。それが 0 でないことが逆行列を持つ必要十分条件となり、

$$A^{-1} = 1/(\det A)\tilde{A}$$

となるが、これは余因子行列 \tilde{A} というものを学んだ時に扱う。

例 1.2.20. 回転行列

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

の行列式は

$$\cos \theta \cos \theta - (-\sin \theta) \sin \theta = 1$$

である。上の公式によれば、その逆行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

である。別の筋道で考えよう。 $R(\theta)$ の逆行列を A とすると、 $AR(\theta) = I_2$ となる。右辺によれば、ベクトル \mathbf{x} に左辺を施しても変わらない。すなわち、 $R(\theta)$ を施してから A を施すと元に戻る。 θ 回転してから A を施すと元に戻る、ということは、 A は逆回転 $R(-\theta)$ でなければならない。すなわち

$$R(\theta)^{-1} = R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

を得る。二つの表示を比べると、

$$\cos(-\theta) = \cos \theta, \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

という良く知られた公式を得る。

例 1.2.21. 鶴亀算。式 (1.10)

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は、つるかめの数 x, y に対して、頭の数と足の数 (z, w) を求める式である。ここで、現れている 2×2 行列を A とすれば

$$\mathbf{z} = A\mathbf{x}$$

の形になる。 A^{-1} を左から掛けると

$$A^{-1}\mathbf{z} = A^{-1}(A\mathbf{x}) = (A^{-1}A)\mathbf{x} = I_2\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

となる。すなわち $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{z}$ 。ここまで、 2×2 の特殊性などみじんも使っていないので、この論法は一般の行列で成立する。

つるかめ算に戻ってみると、

$$A^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

こうして、例えば頭と足が $(10, 26)$ であれば $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \end{pmatrix}$ に A^{-1} をかけて $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ が求まる。

1.2.7 消去法と行列の基本変形（実例で）

どうしてもこのノートを書く時間が足りないので、この章は教科書の 41 ページから §4, §5 を参照してください。

つるかめかぶとむし算の例 1.2.2 を思い出そう。つるが x 匹、亀が y 匹、かぶとむしが z 匹いる。頭の本数を u 、足の本数を v 、羽の本数を w とする。かぶとむしには羽が 4 枚あることに注意してほしい。すると

$$\begin{aligned} u &= x + y + z \\ v &= 2x + 4y + 6z \\ w &= 2x + 0y + 4z \end{aligned} \quad (1.13)$$

となる。行列記法を用いるならば

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

である。中学入試の難問は「合計頭が 8 つ、足が 24 本、羽が 14 枚でした。つる、かめ、かぶとむしはそれぞれ何匹いるでしょう」である。これを、いわゆる消去法で解いてみることを考える。式は

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 24 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

である。「 3×3 の逆行列が求まればすむことだよな」と思ったあなたは勘が良いが、せっかちすぎる。

いわゆる消去法で解いてみる。(1.13) の第一式を使って第二式の x を消去する。そのために、第一式を 2 倍したものを第二式から引く。

ということをやることと、行列記法 (1.14) で第一行の二倍を第二行から引くことは同じである。(第一式=第一行、第二式=第二行、第三式=第三行である。) さらに言えば、この式の両辺に左から次の行列をかけることも同値である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

うそだと思うならやってみてください。掛けると

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

という式を得る。確かに、一行目掛ける (-2) を二行目に足している計算になっている。

第三行の x の係数、すなわち (3,1) 成分を消去するために第一行に (-2) を掛けて第 3 行に足す。ということと、左から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列を掛けることとは同値である。うそだと思ふならやってみてください。掛けると

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

という式を得る。確かに、一行目掛ける(-2)を三行目に足している計算になっている。これを(1.13)のように書き下してやると

$$\begin{aligned} 8 &= x + y + z \\ 8 &= 0x + 2y + 4z \\ -2 &= 0x - 2y + 2z \end{aligned} \quad (1.18)$$

で、第二・第三式(=第二行・第三行)から x が消去されている(=(2,1), (3,1)成分が0になっている)。これ以上 x を消去することはできないので、次は y を消去することを考える。第二式を使って、第一式、第三式から y を消去する。まず、第二式は1/2倍すると y の係数が1になり簡単になる。行列記法では、左から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列を掛けることとは同値である。やってみると

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

を得る。では、第二式の y を使って第一式の y を消去する。第二行の-1倍を第一行に足す。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を左から両辺にかけることと同値である。やってみると

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

となる。第二行の2倍を第三行に足す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を左から掛けることと同値。

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

となる。もう y は消去できないので z を消去する。第三行を $1/6$ 倍するために

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

を両辺に書けると

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

第三行を使って第一行の z を消去するには

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を両辺に掛ければ良い。

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

を得る。第二行の z を第三行で消去するには

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を掛ければ良く、

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

を得る。これで z もこれ以上消去できないが、ここに表れているのはおなじみの単位行列である。すなわち右辺は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ そのものであり、左辺が問題の答え、すなわち $x = 5, y = 2, z = 1$ を与えている。

一回消去するのに左からかけた行列を教科書 P.41 では $P_{ij}(c)$ と書いている。変数の係数を 1 にするために左からかけた行列を $P_i(c)$ と書いている。これらを基本変形行列という。やった操作を全部まとめてかくと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で、左辺の行列の積として $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列が求まっている。もう少しちゃんと説明すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

というように、実は行列に左から基本行列を掛けて行くという操作をやっていたのである。途中省略すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

よって、8つの基本行列の積を P と書くならば

$$I_3 = PA$$

となる行列 P が求まっている。この方法で A の逆行列を求める方法をガウスの消去法 (Gaussian elimination)、掃出し法という。

まだ早い。確かに連立一次方程式は解けた。が、 A の逆行列 P の定義は、 $I_3 = PA = AP$ となる行列だったので $AP = I_3$ を示す必要がある。これが思いのほか難しいのでいやになってしまう。例えば次のようにして証明できる。逆行列を持つ行列を、可逆行列 (invertible matrix) または正則行列 (regular matrix) と言う。

命題 1.2.22. n 次正方行列 A, P が存在して $I_n = PA$ を満たすとする。もし P が逆行列 P^{-1} を持つならば、 $I_n = AP$ も成立し、 A と P は互いに逆行列となる。

証明. $I_n = PA$ に右から P を掛けて $P = I_n P = PAP$ 。左から P^{-1} を掛けて $I_n = P^{-1} P = P^{-1} PAP = I_n AP = AP$ を得る。□

これを使えば、上述の P の可逆性さえ言えれば良いことになる。それは、次の二つの命題から明らかである。

命題 1.2.23. P, Q が可逆な n 次正方行列のとき、 PQ も可逆で、その逆行列は $Q^{-1}P^{-1}$ である。

証明. 定義に戻って計算すると、結合律だけで証明できる。□

命題 1.2.24. 基本変形行列は可逆である。

証明. 逆変形を表す行列を考えると、逆行列になっている。教科書 42 ページ。□

1.2.8 消去法と行列の基本変形 (より正確に)

定義 1.2.25. 次の n 次正方行列を基本変形行列 (または基本行列) という。(以下説明の便宜上、 A を $n \times m$ 行列とする。 $m = 1$ のときには縦ベクトルと同一視される。)

- (他の行をやっつけるタイプ) $P_{ij}(c)$ と書くもので、 I_n の第 (i, j) 成分を c にしたもの。ここに、 c は任意の実数で、 $i \neq j$ とする。 $P_{ij}(c)A$ は、 A の第 j 行を c 倍したものを第 i 行に足しこんだものとなる。

$P_{ij}(c)$ の逆行列は $P_{ij}(-c)$ 。

- (ある行を定数倍するタイプ) $P_i(c)$ と書くもので、 I_n の第 (i, i) 成分を c にしたもの。ただし、 $c \neq 0$ とする。これは、 $P_i(c)$ が可逆になるための必要十分条件である。 $P_i(c)A$ は、 A の第 i 行を c 倍したものである。

$P_i(c)$ の逆行列は $P_i(c^{-1})$ 。

- (行を入れ替えるタイプ) P_{ij} と書くもので、 I_n の第 (i, i) 成分と第 (j, j) 成分を 0 にして、 (i, j) 成分と (j, i) 成分を 1 にしたもの。 $P_{ij}(c)A$ は、 A の第 i 行と第 j 行を入れ替えたものである。

$P_{ij}(c)$ の逆行列は $P_{ij}(c^{-1})$ 。

前の節ですでに基本変形行列は現れている。最初に使った三つは

$$P_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{31}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2(1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。つるかめかぶとむしの「係数」である行列を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とすると、前節での

計算は

$$P_{21}(-2)A$$

で $(2, 1)$ 成分が 0 となり、

$$P_{31}(-2)P_{21}(-2)A$$

で $(3, 1)$ 成分が 0 となり x の係数の消去終了。

$$P_{32}(2)P_{12}(-1)P_2(1/2)P_{31}(-2)P_{21}(-2)A$$

で $(1, 2), (3, 2)$ 成分が 0 となり y の係数の消去終了。

$$P_{23}(-2)P_{13}(1)P_3(1/6)P_{32}(2)P_{12}(-1)P_2(1/2)P_{31}(-2)P_{21}(-2)A$$

で z の係数の消去も終了して、単位行列となっている。ここに現れる 8 つの基本行列の積を P で表せば、 $I_n = PA$ 。ここから先に見たように $P = A^{-1}$ が分かる。

実際に P を手で計算するには、基本行列を記録しておいて掛けるのは効率が悪い。

$$(I_3 \ A)$$

という形の 3×6 行列を書き、これに対して右半分 (A の部分) を単位行列にするべく行変形を行う。そうすると、

$$P(I_3 \ A) = (P \ PA) = (P \ I_3)$$

が求まり、左半分に P が現れる。教科書 61 ページを参照してほしい。(上の説明は左右が教科書と逆である。)

この例では、たまたま「行の入れ替えタイプ」の基本行列は使わずに済んだ。しかし、例えば

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

という行列に、「一行目で他の行をやっつけるタイプ」「行を定数倍するタイプ」をいくらほどこしても $(1, 1)$ 成分はゼロのままである。このような場合は、1 行目と 2 行目を入れ替える、あるいは 1 行目と 3 行目を入れ替える、という基本変形行列 P_{12}, P_{13} を用いることで $(1, 1)$ 成分を 0 でなくす必要がある。

それができないときは、1 列目が全部 0 ということになる。このような行列は可逆でない。

命題 1.2.26. n 次正方行列 A の、ある列 (たとえば第 i 列) が 0 ベクトルであったとする。このとき、 A は可逆ではない。

証明. $I_n = PA$ となる P があったとする。 PA の第一列はどんな P に対しても 0 ベクトルだから、このようなことは起きない。□

今まで説明した作戦で次のことが実現できるのだが、その証明には行列の階数 (rank) の概念を導入する必要がある。

定理 1.2.27. A が可逆な n 次正方行列であるとする、基本変形行列の積で表せる P があり、 $P = A^{-1}$ となる。

また、 A 自身が基本変形行列の積としてあらわされる。

証明. 証明は後回し (階数の定義が必要なため)。だが、計算方法は次のとおり。行入れ替え基本変形行列を A にかけて、 $(1, 1)$ 成分を 0 でなくす。これができないときには、 A の第一列が 0 ベクトルであり A は可逆でないことになり、仮定に反する。

行の定数倍タイプの基本変形行列を使って $(1, 1)$ 成分を 1 にできる。1 行目で他の行をやっつけるタイプの基本変形行列を複数回つかって、 $(i, 1)$ 成分を 0 にできる ($i = 2, 3, \dots, n$)。次に、 $(2, 2)$ 成分を非ゼロにするように第 2 行と、第 i 行 ($i > 2$) との入れ替えを行う。(これが

できないときには、 $(2, i)$ 成分は $i = 2, 3, \dots, n$ のどれでも 0 となる。このとき、この行列が可逆でないことが、階数の概念を使って、後ほど証明される。) $(2, 2)$ 成分を 1 にするように「行を定数倍タイプ」の基本変形行列を左から掛ける。「2 行目で他の行をやっつけるタイプ」の変形行列を繰り返し用いて $(i, 2)$ 成分 ($i \neq 2$) を全て 0 にできる。これを繰り返して、左から基本変形行列を掛けることで A を単位行列にできる。言い換えると、基本変形行列 P_1, P_2, \dots, P_k を用いて $P_k \cdots P_1 A = I_n$ とできる。 $P = P_k \cdots P_1$ とおくことで、定理の前半を得る。

後半は、 $P^{-1} = A$ であることと、 $P = P_k \cdots P_1$ ならば $P^{-1} = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1}$ であること、並びに基本変形行列の逆行列は基本変形行列であること、の三つから従う。□

1.3 線形空間と線形写像

この節では、教科書の第 1 章の内容を扱う。

1.3.1 (抽象) 線形空間

行列を少し見慣れたところで、抽象的な概念を導入する。のちのち、そのありがたみがわかる日が来るかも知れない。

定義 1.3.1. (直積)

集合 S, T の直積 $S \times T$ とは、

$$S \times T := \{(s, t) \mid s \in S, t \in T\}$$

により定義される集合のこと。 $S \times S$ を S^2 と書く。 $(S \times S) \times S$ を S^3 と書く。

例 1.3.2. \mathbb{R}^2 は xy 平面、 \mathbb{R}^3 は xyz 空間である。

定義 1.3.3. (二項演算などの演算)

$f: S \times S \rightarrow S$ のかたちの写像を、 S の二項演算という。 $f(s_1, s_2)$ と書く代わりに、 $s_1 \circ s_2$ と書いたりする。

$g: S \rightarrow S$ のかたちの写像を、 S の単項演算という。

$T \times S \rightarrow S$ のかたちの写像を、 T の S への作用という。これも演算と呼ばれることが多い。

例 1.3.4. $S = \mathbb{R}$ とする。 (s_1, s_2) に対して $s_1 + s_2$ を対応させる写像は \mathbb{R} の二項演算である。これを実数の和という。実数の積も二項演算である。

$x \in \mathbb{R} \mapsto -x \in \mathbb{R}$ は実数の単項演算である。

$S = \mathbb{R}^n$ とする。ベクトルの和 $+$ は S の二項演算である。成分の符号を全部反転する $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$ は \mathbb{R}^n の単項演算である。

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \mathbf{x}$ (ここに $\lambda \mathbf{x}$ はすべての成分を λ 倍して得られるベクトルで、 \mathbf{x} の λ 倍という。) は、 \mathbb{R} の \mathbb{R}^n への作用である。この作用のことをスカラー倍という。

定義 1.3.5. (アーベル群) V に二項演算 $+_V$ が定義されているとき、 $(V, +_V)$ をマグマという。 $+_V$ の添え字は省略する。

1. 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ に対し $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ が成立するとき、 $+$ は結合律 (associativity law) を満たすという。このとき、 $(V, +)$ は半群 (semi group) であるという。
2. ひとつの元 $0 \in V$ が指定され、任意の $\mathbf{x} \in V$ に対し $\mathbf{x} + 0 = \mathbf{x} = 0 + \mathbf{x}$ (単位法則, identity law) を満たすとき、 0 を $+$ の単位元という。通常はこの元をゼロ元という。結合律、単位法則が成立する $(V, +, 0)$ をモノイドという。
3. さらに、 $g : V \rightarrow V$ が指定されて、任意の $\mathbf{x} \in V$ に対し $\mathbf{x} + g(\mathbf{x}) = 0 = g(\mathbf{x}) + \mathbf{x}$ が成立するとき、 $g(\mathbf{x})$ を \mathbf{x} の逆元 (inverse element) をとる単項演算という。通常 $g(\mathbf{x})$ を $-\mathbf{x}$ と表記する。ここまでの三つの公理を満たす $(V, +, 0, -)$ を群という。
4. さらに、 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ を満たすとき、 $(V, +, 0, -)$ を可換群もしくはアーベル群という。

定義 1.3.6. (実線形空間) $(V, +, 0, -)$ を可換群とする。 \mathbb{R} の V への作用 $\mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{x}$ が与えられているとする。通常 $\lambda \cdot \mathbf{x}$ を $\lambda \mathbf{x}$ と表記する。

5. 右分配法則

$$\lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}$$

6. 左分配法則

$$(\lambda +_{\mathbb{R}} \mu) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} +_V \mu \cdot \mathbf{x}$$

7. (スカラー倍の) 結合法則

$$(\lambda \cdot_{\mathbb{R}} \mu) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{x})$$

8. (スカラー倍の) 単位法則

$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

が満たされるとき、 $(V, +, 0, -, \cdot)$ を \mathbb{R} 上の線形空間もしくは実線形空間という。

なんでこんな苦勞をしないとまらないのか。というと、 \mathbb{R}^n は典型的な実線形空間だが、そのほかにもたくさん実線形空間があるから。それらすべてに共通の性質や定理を探すと、一発でたくさん対象が処理できるから。

例 1.3.7. • たてベクトル空間 \mathbb{R}^n は実線形空間である。

- よこベクトル空間は実線形空間である。
- 幾何ベクトルの空間。高校でならう (教科書にもある) 「矢印」の全体は、実ベクトル空間となる。
- V を実数上定義された実数値関数の全体とする。 $f, g \in V$ に対し、 $f +_V g$ は $x \mapsto f(x) +_{\mathbb{R}} g(x)$ なる関数である。線形空間の8つの公理を確かめることは読者にまかせる。

1.3.2 線形写像

定義 1.3.8. V, W を実線形空間とする。 V から W への (実) 線形写像 (linear map) とは、 V から W への写像 f であって次の二つの公理を満たすもの。

1. $f(\mathbf{x} +_V \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) +_W f(\mathbf{y})$
2. $f(\lambda \cdot_V \mathbf{x}) = \lambda \cdot_W f(\mathbf{x})$

ここに、 λ は任意の実数。前半は、「 f が群準同型である」ということを示していることが、群の本を見ると書いてあるでしょう。

次のことは、パズルを解くような感じで示せる。 $f(0) = 0, f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$. 前半: $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. 両辺に $-f(0)$ を足すとわかる。後半: 前半を使って $f(-\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) = f(0) = 0$. $-f(\mathbf{x})$ を両辺に足すとわかる。

命題 1.3.9. 線形写像の合成は線形写像である。

証明は簡単である。

例 1.3.10. A を $m \times n$ 行列とする。 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は写像

$$A \times (-) := f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

を与えるが、これは線形写像である。逆に、任意の $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ なる線形写像は、ただ一つの $m \times n$ 行列 A により $A \times (-)$ の形に表される。(定理 1.2.18 参照。)

例 1.3.11. V で、実係数多項式の集合をあらわすと、これは実線形空間である。 $F(t) \in V$ に対し導関数を求める写像 $F(t) \mapsto F'(t)$ は $V \rightarrow V$ なる線形写像である。

$F(t)$ に対し、積分 $\int_0^1 F(t) dt$ を求める写像は $V \rightarrow \mathbb{R}$ なる線形写像である。

いまから当分の間は、実線形空間のことを単に線形空間という。

定義 1.3.12. V, W を線形空間、 $f : V \rightarrow W$ を線形写像とする。 f の逆写像 g が存在するとき、 f は可逆な線形写像、または同型写像という。

問題 1.7. このとき、 g も自動的に線形写像となることを示せ。

定理 1.3.13. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ なる線形写像が n 次正方行列 A で与えられているとする。 f が同型写像であることと、 A が可逆 (= 正則) であることは同値である。

証明. n 次正方行列 P, Q が、全ての \mathbf{x} に対し $P\mathbf{x} = Q\mathbf{x}$ を満たしたら $P = Q$ であることは、 \mathbf{x} に標準単位ベクトルを突っ込むとわかる。

さて、上の問題により g もとある行列 B の積で書ける。 g が逆写像ということは、 $B A \mathbf{x} = \mathbf{x}$, $A B \mathbf{x} = \mathbf{x}$ が任意の \mathbf{x} で成立することを意味する。よって $B A = I_n = A B$. よってこれらは逆行列。

逆に、 A が逆行列を持つときは、 A^{-1} が逆写像を与えるので同型である。 □

1.4 基底と表現行列

注意 1.4.1. この節では、基底といったら有限集合である物しか扱わないが、一般には無限集合である基底もある。簡単のため、ここでは有限集合であるものしかあつかわない。

線形空間の元を「ベクトル」と呼ぶ。まぎらわしいが。

1.4.1 一次結合

定義 1.4.2. V を線形空間とする。 n 個の元 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ と $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ に対し、

$$x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \in V$$

を $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ の x_1, \dots, x_n による一次結合という。

定義 1.4.3.

$$\varphi_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow V$$

を

$$\varphi_{\mathbf{v}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$$

で定義する。 $(\varphi_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n})$ と書くべきところを $\varphi_{\mathbf{v}}$ と省略した。) 記号の濫用で、下の右辺の記法を用いることもある。

$$\varphi_{\mathbf{v}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

命題 1.4.4. $\varphi_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ は線形写像である。

逆に、 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ の形の線形写像は全てこの形にかける。

証明. 線形写像であることの証明は、各自に任せる。が、線形空間の定義が多用されることに注意しておく。

後半は、 $f(\mathbf{e}_i)$ を \mathbf{v}_i と置くと $f = \varphi_{\mathbf{v}}$ となることが確かめられる。 □

1.4.2 生成と一次独立性

前節の $\varphi_{\mathbf{v}}$ を用いる。

定義 1.4.5. $\varphi_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ が全射であるとき、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は V を生成する (generate V) という。言い換えれば、 V の任意の元がこれら n 元の一次結合で表されるということ。

定義 1.4.6. $\varphi_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ が単射であるとき、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は一次独立 (=線形独立=linearly independent) であるという。一次独立でないとき、一次従属 (=線形従属=linearly dependent) という。

命題 1.4.7. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が一次独立 $\Leftrightarrow \varphi_{\mathbf{v}}$ による 0 の逆像は $\{0\} \Leftrightarrow$ 「 $x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = 0$ ならば $x_1 = \dots = x_n = 0$ 」

証明. 右の \Leftrightarrow は論理的言い換えに過ぎない。左の \Leftrightarrow を示す。 \Rightarrow は、「単射ならば 0 の逆像は一元集合。そこには 0 が入るから、逆像は $\{0\}$ 」でできる。 \Leftarrow は、

「 $\varphi_{\mathbf{v}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi_{\mathbf{v}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ならば $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 」を言えばよい。ところで、仮定の式と

$\varphi_{\mathbf{v}}$ の線形性から $\varphi_{\mathbf{v}} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = 0$. 0 の逆像が $\{0\}$ ならば、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$.

すなわち $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. □

1.4.3 基底と表現行列

定義 1.4.8. (基底) 上の $\varphi_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ が全単射であるとき (すなわち同型であるとき)、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は V の基底であるという。

このように、 V の基底を一つさだめると、 V と \mathbb{R}^n の間の同型写像が一つ定まる。

注意 1.4.9. 前節で示したことから、ベクトルの集合 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が V の基底であることは

1. V を生成する
2. 一次独立である

の二つの条件を満たしていることと同値である。多くの本が、こちらを定義に採用している。

例 1.4.10. $V = \mathbb{R}^2$ とする。 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が一次独立である必要十分条件は、

$$x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

なる方程式に対し $x = y = 0$ 以外の解がないことである。言い換えると、

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解が $x = y = 0$ しかないことである。この 2×2 行列を A としよう。もし A^{-1} があれば、それを左からかけることで $x = y = 0$ が言える。すなわち、 A が可逆ならば $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ は一次独立である。

逆に、逆行列が存在しないときは $ad - bc = 0$ 。これは、二つのベクトルが平行であるか、どちらかが 0 であること w 示している ($a \neq 0$ ならば、第一のベクトルを c/a 倍して第二のベクトルから引くと 0 である)。したがって二つのベクトルは一次従属である。

例 1.4.11. t を実数を動く変数とし、

$$V := \{A \sin(t + C) \mid A, C \in \mathbb{R}\}$$

なる関数の空間を考える。この空間は、微分方程式 $f''(t) = -f(t)$ の解空間である (知らない人は気にしなくて良い)。

V の任意の元は加法定理を使うと実数 x, y により

$$x \sin t + y \cos t$$

の形にかける。逆に、ここから $A \sin(t + C)$ の形にすることもできる。後者の形から、 V は線形空間であることがわかる。 $\sin t, \cos t \in V$ は V を生成する。これらが一次独立であることも、 $t = 0, t = \pi/4$ を代入することで確かめられる。

こうして、 $\sin t, \cos t$ は V の基底であることがわかる。したがって、

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow V, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x \sin t + y \cos t$$

は同型を与える。

定義 1.4.12. (表現行列) 線形空間 V に基底 v_1, v_2, \dots, v_n が、 W に基底 w_1, w_2, \dots, w_m がとれたとする。 $f: V \rightarrow W$ を線形写像とすると、合成により

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi_v} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\varphi_w^{-1}} \mathbb{R}^m$$

なる線形写像が得られる。これは $m \times n$ 行列 A の積としてただ一通りに表される。 A を f の基底 v, w による表現行列という。

命題 1.4.13. $f(v_1)$ を w の一次結合で書く方法がただ一通りある。これを

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m$$

とする。同様に $i = 2, \dots, n$ に対し

$$f(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \dots + a_{mi}w_m$$

とおき、 $A := (a_{ij})$ (この記法は、「 A を a_{ij} を成分とする行列とする、の意味) とすると、これが表現行列を与える。

証明. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\varphi_v(\mathbf{x}) = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

f に両辺を食べさせると f の線形性から

$$f(\varphi_v(\mathbf{x})) = (f(v_1), \dots, f(v_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

ここで、 A の作り方から

$$(f(v_1), \dots, f(v_n)) = (w_1, \dots, w_m)A$$

となっているので、この両辺に \mathbf{x} を右からかけて

$$f(\varphi_v(\mathbf{x})) = (f(v_1), \dots, f(v_n))\mathbf{x} = (w_1, \dots, w_m)A\mathbf{x} = \varphi_w(A\mathbf{x}).$$

言い換えると

$$\varphi_w^{-1} \circ f \circ \varphi_v(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

□

注意 1.4.14. このように、 V, W に基底をとることにより、線形写像は行列であらわされる。したがって、線形写像に関するさまざまな計算は行列の計算に帰着される。この事実は、線形代数における行列の重要性を示している。

基底を取り換えると表現行列が変わる。うまく基底を選んで、表現行列を簡単な形にすることについて、のちに学ぶ。(対角化や、Jordan 標準形と呼ばれるもの。)

1.5 基底と次元

以下、 V を抽象線形空間とする。が、内容の理解のためには、常に n 次元ベクトル空間を念頭においていれば十分である。(ただし、 V の 8 つの公理しか用いずに全ての議論が展開できるということは、著者にはちょっと驚きである。)

定義 1.5.1. V の有限個のベクトル $v_1, \dots, v_m \in V$ に対し、 v_1, \dots, v_m の一次結合で書ける V の元の集合を

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$$

であらわし、 v_1, \dots, v_m の生成する V の部分空間という。これは線形空間となる。

補題 1.5.2. V の元 v_1, \dots, v_m は一次独立だが、 v_1, \dots, v_m, w は一次従属とする。このとき $w \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ 。

証明. $x_1v_1 + \dots + x_mv_m + yw = 0$ となる、すべては 0 ではない実数 x_1, \dots, x_m, y が存在する。もし $y = 0$ とすると、 v_1, \dots, v_m の一次独立性の仮定に違反する。したがって $y \neq 0$ 。移項して $-yw \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ となり、 y で割ると結論が得られる。□

定義 1.5.3. V が有限個のベクトル $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ で生成されるとき、 V を有限生成線形空間という。

定理 1.5.4. V が $T = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ で生成されるとする。このとき、これら m 本のベクトルの部分集合 S で、 S は一次独立であるが、 S に属さない T の元をどれを付け加えても一次従属になるとする。(T 自身が一次独立である時には、 $S = T$ ととるとこの性質を満たしていると考ええる。)

このとき、 S は V の基底となる。

系 1.5.5. 有限生成な線形空間は、有限個の元からなる基底を持つ。

脱線： S は「 T の一次独立な部分集合のうち包含関係に関して極大なもの」と言う。

証明. S の元は一次独立。したがって、 S が V を生成することを言えばよい。 T の元 w は、 $\langle S \rangle$ に入る。実際、 $w \in S$ なら自明だし、 $w \notin S$ ならば、上の補題から $w \in \langle S \rangle$ 。よって $T \subset \langle S \rangle$ 。ここから、 $\langle T \rangle \subset \langle S \rangle$ だが、 $V = \langle T \rangle$ なので $V = \langle T \rangle \subset \langle S \rangle \subset V$ 。よって $V = \langle S \rangle$ 。□

定義 1.5.6. (階数、rank) $v_1, \dots, v_m \in V$ とする。これらの元のうちで、一次独立にとれるベクトルの個数の最大値をこれらのベクトルの階数 (rank) という。

$\{0\}$ のランクは 0。

定理 1.5.7. (一次結合でランクは増やせない) a_1, \dots, a_n のランクを n' とする。 $b_1, \dots, b_m \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ とする。このとき、 b_1, \dots, b_m のランク m' は n' 以下。

証明. 並べ替えて、 $a_1, \dots, a_{n'}$ が一次独立であるとしてよい。補題より $\langle a_1, \dots, a_{n'} \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ 。

次に、ならべかえて、 $b_1, \dots, b_{m'}$ が一次独立であるとしてよい。 b_1 は $a_1, \dots, a_{n'}$ の一次結合で書ける。このとき、 $b_1 \neq 0$ よりどれかの係数は 0 でない。0 でない係数を持つものを並べ替えて a_1 としてよい。すなわち

$$b_1 = x_1 a_1 + \dots + x_{n'} a_{n'}, \quad x_1 \neq 0.$$

ここから移項して $a_1 \in \langle b_1, a_2, \dots, a_{n'} \rangle$ がわかる。よって

$$\langle a_1, \dots, a_{n'} \rangle \subset \langle b_1, a_2, \dots, a_{n'} \rangle$$

であるが、左辺は V なので \subset は等号である。また、補題より $b_1, a_2, \dots, a_{n'}$ は一次独立となる。次に、 $a_2, \dots, a_{n'}$ のどれかを b_2 に取り換える。 b_2 を $b_1, a_2, \dots, a_{n'}$ の一次結合としたとき、 $a_2, \dots, a_{n'}$ のうちのどれかの係数は 0 でない。(そうでないと b_1, b_2 が一次従属。)

係数が 0 でないものを a_2 と並べなおすと、同様の議論で

$$\langle b_1, a_2, \dots, a_{n'} \rangle = \langle b_1, b_2, a_3, \dots, a_{n'} \rangle$$

がわかる。これを繰り返すと、やがては $b_1, \dots, b_{m'}$ で $a_1, \dots, a_{n'}$ を置き換えても基底を得られることがわかる。すると、 $n' \geq m'$ でなければ置き換えられなくなっておかしい。より正確に言えば、 $n' < m'$ とすると、 a たちを全部 b (n' 個) に置き換えても b に残り $b_{n'+1}$ があることになる。しかし、これは $\langle b_1, b_2, \dots, b_{n'} \rangle$ に入っていることになり、矛盾である。□

定理 1.5.8. V が n 元からなる基底を持つとすると、 V に含まれる一次独立な元は最大 n 個しかとれない。

このとき、 V に含まれる n 個の一次独立な元は、どう選んでも V の基底となる。

特に、 V が有限個の元からなる基底を持つとき、基底の元の個数は基底の選び方によらない。この数を V の次元といい、 $\dim V$ であらわす。 V を n 次元線形空間という。

証明. v_1, \dots, v_n を基底とすると、 $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ 。このとき、上の定理から、 V の元をどう選んでも、一次独立なものは多くても n 個しかとれない。

n 個とれたとして w_1, \dots, w_n とする。 V より $\langle w_1, \dots, w_n \rangle$ が真に小さかったとすると、後者に属さない $v \in V$ がとれる。すると w_1, \dots, w_n, v は一次独立となり、矛盾する。よって $V = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ で、基底となっている。□

問題 1.8. V を n 次元線形空間とする。上の定理を用いて、次の三つの同値性を示せ。

1. $v_1, \dots, v_n \in V$ が基底。
2. $v_1, \dots, v_n \in V$ が一次独立。
3. $v_1, \dots, v_n \in V$ は V を生成。

ヒント：3 から 2 を導くには、3 を仮定して「 v_1, \dots, v_n の中で一次独立なベクトルをとれるだけとると基底になる」ことを用いる。

次は定義 1.4.5, 定義 1.4.6 の言い換えに他ならない。

命題 1.5.9. A を $m \times n$ 次正方形行列とする。 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を A を縦ベクトルに左から掛ける写像とする。

1. f が単射 $\Leftrightarrow A$ の n 本の列ベクトルは一次独立
2. f が全射 $\Leftrightarrow A$ の n 本の列ベクトルは \mathbb{R}^m を生成する。

上の問題を使うと次が言える。

定理 1.5.10. A を n 次正方形行列とするとき、以下は同値。

1. A は可逆
2. A の n 本の列ベクトルは一次独立
3. A の n 本の列ベクトルは \mathbb{R}^m を生成する
4. A の n 本の列ベクトルは \mathbb{R}^m の基底

証明. 1 は f の全単射性と同値（理由：全単射ならば逆写像も線形写像。それは行列 B で与えられる。逆写像であることは $AB = I_n, BA = I_n$ と同値）。だから 1 ならば 2, 1 ならば 3。一方、2, 3, 4 の同値性はすでに見た。2 ならば 3 も言えるということから、2 から f は全単射となり、1 が言える。3 ならば 2 も言えることから、3 から 1 も言える。□

系 1.5.11. A を n 次正方形行列とする。 $AX = I_n$ となる n 次正方形行列があれば、 $XA = I_n$ 。特に $X = A^{-1}$ 。左右逆に、 $XA = I_n$ が言えても同じ結論を得る。

$AX = I_n$ ならば、 A を左から掛ける写像は全射であるから、上の定理により従う。 $XA = I_n$ ならば、 $A \times (-)$ は単射なので同様。

参考文献

- [1] 青木利夫ほか著「線形代数要論」培風館
- [2] 松坂和夫「代数系入門」岩波書店