平成 19 年度卒業論文

ガウス曲率が 0 となる曲面

広島大学理学部数学科
B044410　日隈俊樹
指導教官 田丸博士 准教授

平成 20 年 2 月 8 日

目　次

1 はじめに

ガウス曲率が 0 となる曲面に, 平面, 円錐面, 円柱面があることは知られている. 今回, これらの曲面以外にガウス曲率が 0 となる曲面があるのだろうか, ということをテーマにした.

具体的には, まず, 直線の連続的運動によってつくられる曲面である線織面を定義し, 例として, 双曲放物面と一葉双曲面を線織面として表示した. 次に, 線織面のうち, ガウス曲率が恒等的に 0 となる可展面を定義し, 線織面が可展面になるための必要十分条件を与えた. そして, 錐面, 柱面, 接線曲面の 3 つの線織面は可展面であり, 逆に一般の可展面は, これらをなめらかに継ぎ合わせた形をしている, という定理に証明を与えた. この定理により, ガウス曲率が 0 となる曲面には平面, 円錐面, 円柱面以外にも, 接線曲面があることが分かった. 最後に, 接線曲面の例を挙げた.

2　準備

まず, 線織面の定義を述べる.

定義 2.1

空間曲線 $\gamma(u)$ が与えられたとき, その曲線の各点 $\gamma(u)$ を始点とし, 変数 u になめらかに依存する 0 でないベクトル $\xi(u)$ ともう一つのパラメーター v を与えて

$$p(u,v) := \gamma(u) + v\xi(u) \tag{2.1}$$

という形で表される曲面を**線織面**という.

例として, 双曲放物面と一葉双曲面の線織面表示を挙げる.

命題 2.2

双曲放物面 $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ は二通りの方法で以下のように線織面として表示される：

$$p(u,v) = (au, 0, u^2) + v(a, \pm b, 2u). \tag{2.2}$$

(証明)

曲面と xz-平面の交わりとしてできる放物線を $\gamma(u)$ にとり,

$$\gamma(u) = (au, 0, u^2)$$

とおく (ただし, u は長さのパラメーターにはなっていないことに注意する).

次に,

$$\xi(u) = (q(u), \eta(u), \zeta(u))$$

として, $\gamma(u) + v\xi(u)$ が双曲放物面の式を満たすように $\xi(u)$ をきめる.

$$x = au + vq(u), \quad y = v\eta(u), \quad z = u^2 + v\zeta(u)$$

を双曲放物面の式に代入する.

$$\frac{(au+vq(u))^2}{a^2}-\frac{(v\eta(u))^2}{b^2}=u^2+v\zeta(u),$$

$$\frac{a^2+2vauq(u)+v^2q^2(u)}{a^2}-\frac{v^2\eta^2(u)}{b^2}=u^2+v\zeta(u),$$

$$v\left(\frac{2uq(u)}{a}-\zeta(u)\right)+v^2\left(\frac{q^2(u)}{a^2}-\frac{\eta^2(u)}{b^2}\right)=0.$$

上の式は, すべての v に対して成り立つ必要があるから, v の係数, v^2の係数がそれぞれ 0 にならなければならない.

$$\begin{cases} \dfrac{2uq(u)}{a}-\zeta(u) &= 0, \\ \dfrac{q^2(u)}{a^2}-\dfrac{\eta^2(u)}{b^2} &= 0. \end{cases}$$

上の連立方程式を解くと, ゆえに

$$q(u)=a, \quad \eta(u)=\pm b, \quad \zeta(u)=2u.$$

よって,

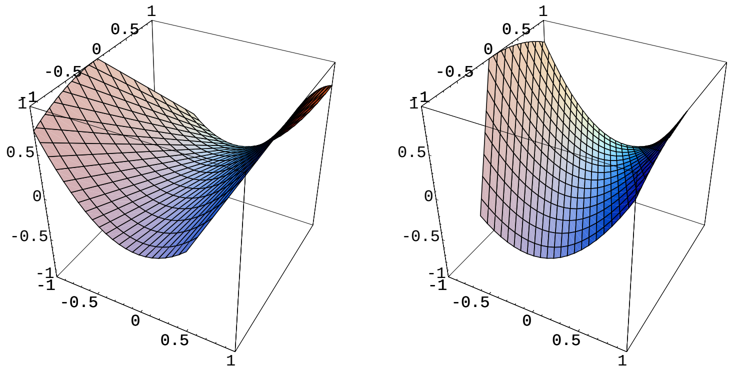
$$\xi(u)=(a,\pm b,2u)$$

となり, 双曲放物面は,

$$p(u,v)=(au,0,u^2)+v(a,\pm b,2u)$$

と二通りの方法で線織面として表示される. □

$a=b=1$ のとき, すなわち $p(u,v)=(u+v,\pm 2v,u^2+2uv)$ の双曲放物面は次のようなものである.



$$p(u,v) = (u+v, 2v, u^2+2uv), \quad p(u,v) = (u+v, -2v, u^2+2uv)$$

双曲放物面

命題 2.3
　一葉双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ は二通りの方法で以下のように線織面として表示される：

$$p(u,v) = (a\cos u, b\sin u, 0) \pm v(-a\sin u, b\cos u, c) \tag{2.3}$$

(証明)
　曲面と xy-平面の交わりとしてできる楕円を $\gamma(u)$ にとり,

$$\gamma(u) = (-a\cos u, b\sin u, 0)$$

とおく (ただし, u は長さのパラメーターにはなっていないことに注意する).
　次に,

$$\xi(u) = (q(u), \eta(u), \zeta(u))$$

として, $\gamma(u) + v\xi(u)$ が一葉双曲面の式を満たすように $\xi(u)$ をきめる.

$$x = a\cos u + vq(u), \quad y = b\sin u + v\eta(u), \quad z = v\zeta(u)$$

を一葉双曲面の式に代入する.

$$\frac{(a\cos u + vq(u))^2}{a^2} + \frac{(b\sin u + v\eta(u))^2}{b^2} - \frac{v\zeta(u)}{c^2} = 1,$$

$$\frac{a^2\cos^2 u + 2vaq(u)\cos u + v^2q^2(u)}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 u + 2vb\eta(u)\sin u + v^2\eta^2(u)}{b^2} - \frac{v^2\zeta^2(u)}{c^2} = 1,$$

$$2v\left(\frac{q(u)\cos u}{a}+\frac{\eta(u)\sin u}{b}\right)+v^2\left(\frac{q^2(u)}{a^2}+\frac{\eta^2(u)}{b^2}-\frac{\zeta^2(u)}{c^2}\right)=0.$$

上の式は, すべての v に対して成り立つ必要があるから，$2v$ の係数，v^2の係数がそれぞれ 0 にならなければならない.

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{q(u)\cos u}{a}+\dfrac{\zeta(u)\sin u}{b} & = & 0,\\ \dfrac{q^2(u)}{a^2}+\dfrac{\eta^2(u)}{b^2}-\dfrac{\zeta^2(u)}{c^2} & = & 0.\end{array}\right.$$

上の連立方程式を解くと, ゆえに

$$q(u)=-a\sin u,\quad \eta(u)=b\cos u,\quad \zeta(u)=\pm c$$
$$q(u)=a\sin u,\quad \eta(u)=-b\cos u,\quad \zeta(u)=\pm c$$

よって,

$$\pm\xi(u)=(-a\sin u, b\cos u, c)$$

となり, 一葉双曲面は,

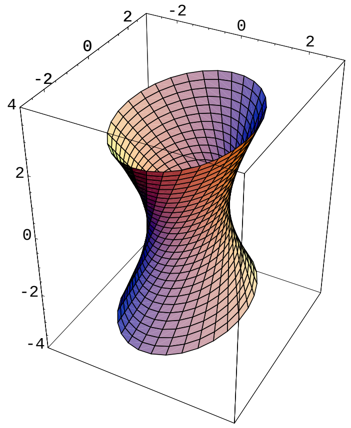
$$p(u,v)=(-a\cos u, b\sin u, 0)\pm v(-a\sin u, b\cos u, c)$$

と二通りの方法で線織面として表示される. □

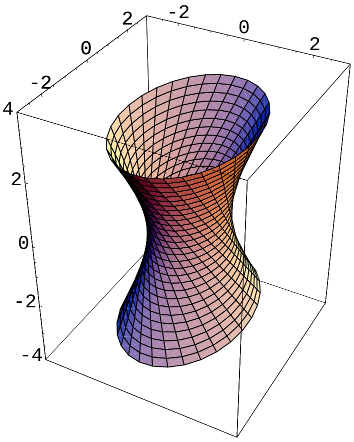
$a=1,\quad b=\dfrac{3}{2},\quad c=2$ のとき, すなわち,

$$p(u,v)=\left(\cos u\mp v\sin u, \frac{3}{2}\sin u\pm\frac{3}{2}v\cos u, \pm 2v\right)$$

の一葉双曲面は次のようなものである.



$$p(u,v) = (\cos u - v \sin u, \frac{3}{2}\sin u + \frac{3}{2} v \cos u, 2v)$$



$$p(u,v) = (\cos u + v \sin u, \frac{3}{2}\sin u - \frac{3}{2} v \cos u, -2v)$$

一葉双曲面

3　定理

定義 3.1

線織面のうち, ガウス曲率が恒等的に 0 となるものを**可展面**という.

定理 3.2

線織面が可展面になるための必要十分条件は,

$$\det(\dot{\gamma}, \xi, \dot{\xi}) = 0. \tag{3.1}$$

(証明)

式 (2.1) で与えられた線織面 $p(u,v) = \gamma(u) + v\xi(u)$ を考える.

まず,

$$p_u = \dot{\gamma} + v\dot{\xi}, \qquad p_v = \xi$$

となり, さらに,

$$p_{uu} = \ddot{\gamma} + v\ddot{\xi}, \qquad p_{uv} = \dot{\xi}, \qquad p_{vv} = \xi$$

を得る. 曲面の単位法線ベクトルを $\nu(u,v)$ とすると, 第二基本量は,

$$\begin{gathered} L = p_{uu} \cdot \nu = (\ddot{\gamma} + v\ddot{\xi}) \cdot \nu, \\ M = p_{uv} \cdot \nu = \dot{\xi} \cdot \nu, \\ N = p_{vv} \cdot \nu = 0 \end{gathered}$$

と表されるので,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-(\dot{\xi} \cdot \nu)^2}{EG - F^2} \tag{3.2}$$

となる. 式 (3.2) は,

$$K = 0 \Longleftrightarrow \dot{\xi} \cdot \nu = 0$$

であることを表している.

一方,

$$\dot{\xi} \cdot \nu = \frac{\dot{\xi} \cdot (p_u \times p_v)}{|p_u \times p_v|} \tag{3.3}$$

$$p_u = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 + v\dot{\xi}_1 \\ \dot{\gamma}_2 + v\dot{\xi}_2 \\ \dot{\gamma}_3 + v\dot{\xi}_3 \end{pmatrix}, p_{uv} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{pmatrix}, p_v = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$\begin{aligned}
\text{式 (3.3) の分子} &= \dot{\xi}_1(\xi_3(\dot{\gamma}_2 + v\dot{\xi}_2) - \xi_2(\dot{\gamma}_3 + v\dot{\xi}_3)) + \dot{\xi}_2(\xi_1(\dot{\gamma}_3 + v\dot{\xi}_3) - \xi_3(\dot{\gamma}_1 + v\dot{\xi}_1)) \\
&\quad + \dot{\xi}_3(\xi_2(\dot{\gamma}_1 + v\dot{\xi}_1) - \xi_1(\dot{\gamma}_2 + v\dot{\xi}_2)) \\
&= \begin{vmatrix} \dot{\xi}_1 & \dot{\gamma}_1 + v\dot{\xi}_1 & \xi_1 \\ \dot{\xi}_2 & \dot{\gamma}_2 + v\dot{\xi}_2 & \xi_2 \\ \dot{\xi}_3 & \dot{\gamma}_3 + v\dot{\xi}_3 & \xi_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \dot{\xi}_1 & \dot{\gamma}_1 & \xi_1 \\ \dot{\xi}_2 & \dot{\gamma}_2 & \xi_2 \\ \dot{\xi}_3 & \dot{\gamma}_3 & \xi_3 \end{vmatrix} \\
&= \det(\dot{\xi}, \dot{\gamma}, \xi) \\
&= \det(\dot{\gamma}, \xi, \dot{\xi})
\end{aligned}$$

なので, 線織面が可展面になるための必要十分条件は, $\dot{\xi} \cdot \nu = 0$, すなわち $\det(\dot{\gamma}, \xi, \dot{\xi}) = 0$ で与えられる. □

定理 3.3

以下の 3 つの線織面は可展面である. 逆に一般の可展面は, これらをなめらかに継ぎ合わせた形をしている.

錐面 : 1 定点を通る直線でつくられる曲面.代表的なものに円錐がある.

柱面 : 平行な直線でつくられる曲面.代表的なものに平面, 円柱面がある.

接線曲面 : 空間曲線 $\gamma(t)$ に対し, $p(u,v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u)$ で表される曲面.

(証明)

まず, 3 つの線織面が可展面であることを示す.

1. 錐面について,

   定点を c とする. 錐面は, 定点 c を通る直線でつくられる曲面なので, 直線の初期ベクトルを $\xi(u)$ とすると,

$$p(u,v) = c + v\xi(u)$$

と表すことができる.

式 (2.1) と等しくなることから,

$$\gamma(u) = c$$

が成り立つ. これを一階微分すると,

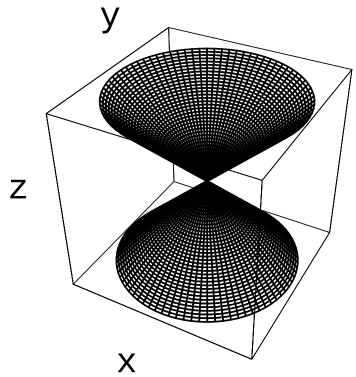
$$\dot{\gamma} = 0$$

がいえる. よって,

$$\det(\dot{\gamma}, \xi, \dot{\xi}) = 0$$

となり, 錐面は可展面となる.

定ベクトル c を $(0,0,0)$ とおいたときの図は次のようになる.



$$p(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v)$$

2. 柱面について,

$\xi(u)$ を定ベクトルとする. 柱面は平行な直線でつくられる曲面なので, 直線の初期ベクトルを $\gamma(u)$ とすると,

$$p(u,v) = \gamma(u) + cv \quad (c : \text{定ベクトル})$$

と表すことができる.

式 (2.1) と等しくなることから,

$$\xi(u) = c$$

が成り立つ. これを一階微分すると,

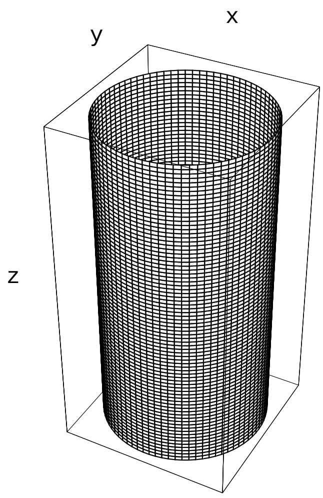
$$\dot{\xi} = 0$$

がいえる. よって,

$$\det(\dot{\gamma}, \xi, \dot{\xi}) = 0$$

となり, 柱面は可展面となる.

定ベクトル c を $(0,0,1)$ とおいたときの図は次のようになる.



$$p(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

3. 接線曲面について,

(空間曲線 $\gamma(t)$ に対し) $\qquad p(u,v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u)$

式 (2.1) と等しくなることから,

$$\xi(u) = \dot{\gamma}(u)$$

が成り立つ. これを一階微分すると,

$$\dot{\xi} = \ddot{\gamma}$$

がいえる. よって,

$$\det(\dot{\gamma}, \xi, \dot{\xi}) = \det(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = 0$$

となり, 接線曲面は可展面となる.

次に, 可展面はなめらかに継ぎ合わせた形をしている, すなわち可展面は錐面, 柱面, 接線曲面のいずれかであることの証明をする.

(I) $|\xi| = 1$ のとき

$p(u,v) = \gamma(u) + v\xi(u)$ を可展面とする.

$\det(\dot{\gamma}, \xi, \dot{\xi}) = 0$ が成立するから, 同時には 0 にならない u だけの関数 $a(u)$,$b(u)$,$c(u)$ が存在して,

$$a\dot{\gamma} + b\xi + c\dot{\xi} = 0 \tag{3.4}$$

が成り立つことは同値である.

(i) $a = 0$ のとき

式 (3.4) は,

$$b\xi + c\dot{\xi} = 0$$

となるが, ξは単位ベクトルだから, $\dot{\xi} \cdot \xi = 0$ なので, 上の式の両辺に ξを内積すると,

$$b|\xi|^2 + c\dot{\xi} \cdot \xi = 0,$$
$$b = 0$$

となり, $b = 0$ を得る.よって, $c\dot{\xi} = 0$ となるが, b, c は同時には 0 にならないので, $c \neq 0$.とくに, $\dot{\xi} = 0$ を得る.

すなわち, ξは定ベクトルであり, 可展面は柱面となる.

(ii) $a \neq 0$ のとき

$$\sigma(u) := \gamma(u) + \frac{c(u)}{a(u)}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} p(u,v) &= \sigma(u) + v\xi(u) - \frac{c(u)}{a(u)}\xi(u) \\ &= \sigma(u) + r\xi(u) \quad \left(r = v - \frac{c(u)}{a(u)}\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

と書き直すことができる. このとき,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \dot{\gamma} + \frac{d}{du}\left(\frac{c}{a}\right)\xi + \frac{c}{a}\dot{\xi} \\ &= \frac{d}{du}\left(\frac{c}{a}\right)\xi + \frac{1}{a}\left(a\dot{\gamma} + c\dot{\xi}\right) \end{aligned}$$

であるから, 式 (3.4) より,

$$a\dot{\sigma} - a\frac{d}{du}\left(\frac{c}{a}\right)\xi + b\xi = 0,$$

$$a\dot{\sigma} = a\frac{d}{du}\left(\frac{c}{a}\right)\xi - b\xi,$$

$$\dot{\sigma} = \frac{d}{du}\left(\frac{c}{a}\right)\xi - \frac{b}{a}\xi = \left(\frac{d}{du}\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{b}{a}\right)\xi \tag{3.6}$$

となる.

(a) $\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{c}{a}\right) - \dfrac{b}{a} = 0$ のとき

式 (3.6) より, $\dot{\sigma} = 0$ であるから, $\sigma(u)$ は定ベクトルとなる.
したがって, 式 (3.5) は

$$p(u,v) = P + r\xi(u) \quad \left(P = \sigma(u), r = v - \frac{c(u)}{a(u)}\right)$$

と書けるが, これは P を頂点とする錐面となる.

よって, 可展面は錐面となる.

(b) $\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{c}{a}\right) - \dfrac{b}{a} \neq 0$ のとき

$\sigma(u)$ は曲線となり, 式 (3.6) より, σが曲線 $\gamma(u)$ の接ベクトルに比例していることがわかる.

よって, 式 (3.5) より, 可展面は接線曲面となる.

(II) $|\xi| \neq 1$ のとき

$p^1(u,v) = \gamma^1(u) + v\xi^1(u)$ を可展面とする.

$$\frac{1}{c}p^1(u,v) = \frac{1}{c} + \gamma^1(u) + \frac{v}{c}\xi^1(u)$$

ここで,

$$\frac{p^1}{c} = P, \quad \frac{\gamma^1(u)}{c} = A, \quad \frac{\xi^1(u)}{c} = B$$

とおくと,

$$P(u,v) = A(u) + vB(u)$$

は線織面となる.

$$\dot{A} = \frac{1}{c}\dot{\gamma}^1, \quad \dot{B} = \frac{1}{c}\dot{\xi}^1$$

より, 式 (3.1) を満たすので, P は可展面である.

また,

$$|B| = \left|\frac{\xi^1}{c}\right| = 1$$

がいえる.

よって, 可展面 P は錐面, 柱面, 接線曲面のうちのどれかである. また, P に c 倍したものも錐面, 柱面, 接線曲面のうちのどれかである. ゆえに, 可展面 p^1 は錐面, 柱面, 接線曲面のうちのどれかである.

よって, 可展面はこれらをなめらかに継ぎ合わせた形をしている.

以上より, 定理 3.3 が言える. □

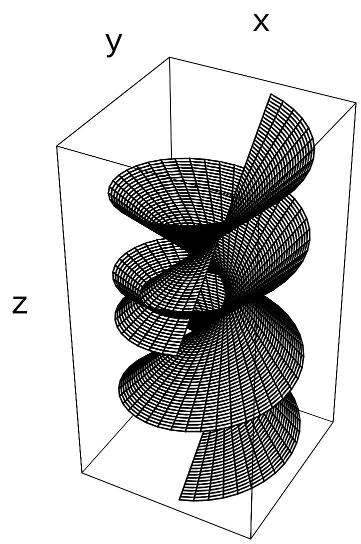
定理 3.3 により, ガウス曲率が 0 となる曲面には平面, 円錐面, 円柱面以外にも, 接線曲面があることが分かる.

4　接線曲面の例

接線曲面の例を挙げておく．例えば,つるまき線 $\gamma(u) = (\cos u, \sin u, u)$ の接線曲面は,

$$\begin{aligned} p(u,v) &= \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u) \\ &= (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, u + v) \end{aligned}$$

で表される.



つるまき線の接線曲面

謝辞

最後になりましたが, 卒業論文を書くにあたり, 指導教官の田丸博士先生には, ご多忙にもかかわらず, 多くの助言やご指導をいただきました. この場を借りて深く御礼申し上げます.

参考文献

[1] 梅原雅顕, 山田光太郎 『曲線と曲面－微分幾何学的アプローチー』裳華房, 2002.
[2] 剱持勝衛 『曲面論講義－平均曲率一定曲面入門』培風館, 2000.