

次の1～3のうちから2つ選び、解答せよ。

1. 授業では弦の振動という現象が微分方程式の問題に帰着されることを説明した。弦の振動の微分方程式がどのようにして導出されるのかについて調べ、導出の過程と手順を次の点に注意してまとめよ。

- (i) 論旨が明快な読みやすい文章にまとめよ。
- (ii) 導出の際に行われる数学的な操作が保証されるために必要となる仮定を適宜述べ、出来る限り数学的に読めるように書くこと。特に近似の議論、微分や Taylor 展開式などを用いる場合には注意すること。

2.  $c > 0$  は定数とする。次の一次元波動方程式

$$(W) \quad c^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 \quad ((t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

について次の問いに答えよ。

- (1)  $\mathbb{R}$  上の  $C^2$  級関数  $h(X)$  に対して  $u(t, x) = h(x + ct)$  は (W) の解であることを示せ。
- (2)  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  上の  $C^2$  級関数  $u(t, x)$  が (W) を満たすとする。この  $u$  に対し

$$v(s, y) = u(t, x), \quad s = \frac{ct + x}{2}, \quad y = \frac{ct - x}{2}$$

で関数  $v$  を定める。このとき  $\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial y}$  が満たすべき微分方程式を求めよ。

- (3)  $\mathbb{R}$  上の  $C^2$  級関数  $f(X), g(X)$  が存在して  $u(t, x)$  は

$$u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

の形に表されることを示せ。

3. 次の方程式 (B) を満たす  $C^2$  級の解  $u(t, x)$  で  $u(t, x) = \varphi(t)g(x)$  の形をしているものをすべて求めよ。但し  $L > 0, c > 0$  は定数であるとする。

$$(B) \quad \begin{cases} c^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 & (t \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq L), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0 & (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$