代数学 II 演習 No. 1

[1] 次の集合 X から一つ選び, その濃度を求めよ.

(1) $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

(2) $X = \{\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0 \,\}, \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 0 \,\}, \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0 \,\}, \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0 \,\}\}$.

(3) 征夷大将軍就任者からなる集合 $X = \{$ 足利義遐, 足利高氏, 足利義尹, 足利義稙, 足利義材, 足利義澄 $\}$.

[2] 次の対応 f から一つ選び, 写像を定めるか判定せよ.

(1) $f\colon \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}$ を $a \in \mathbb{R}_{<0}$ に $f(a)^2 = a$ となる $f(a) \in \mathbb{R}$ を対応させることで定める.

(2) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ を $a \in \mathbb{R}_{>0}$ に $f(a)^2 = a$ となる $f(a) \in \mathbb{R}$ を対応させることで定める.

(3) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $a \in \mathbb{R}$ に $f(a)^3 = a$ となる $f(a) \in \mathbb{R}$ を対応させることで定める.

(4) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ を $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ に $f(\frac{b}{a}) = \max\{|a|, |b|\} \in \mathbb{Q}$ を対応させることで定める.

[3] A, B, C, D を $\mathbb{R}$ の部分集合とする. $A \times B \subseteq C \times D$ ならば $A \subseteq C$ かつ $B \subseteq D$ と言えるか.

[4] A, B, C, D, E を集合とし, $f \in \mathrm{Map}(D, E)$, $g \in \mathrm{Map}(C, D)$, $h \in \mathrm{Map}(B, C)$, $k \in \mathrm{Map}(A, B)$ とする. 関数の合成に関する結合律を用いて $(f \circ (g \circ h)) \circ k = (f \circ g) \circ (h \circ k)$ を示せ.

[5] A, B, C, D, E, F を集合とし, $f_1 \in \mathrm{Map}(A, B)$, $f_2 \in \mathrm{Map}(C, D)$, $f_3 \in \mathrm{Map}(E, F)$, $g_1 \in \mathrm{Map}(A, C)$, $g_2 \in \mathrm{Map}(C, E)$, $h_1 \in \mathrm{Map}(B, D)$, $h_2 \in \mathrm{Map}(D, F)$ とする. $f_2 \circ g_1 = h_1 \circ f_1$ かつ $f_3 \circ g_2 = h_2 \circ f_2$ ならば $f_3 \circ g_2 \circ g_1 = h_2 \circ h_1 \circ f_1$ であることを示せ. (本来 $f_3 \circ g_2 \circ g_1$ 等は $(f_3 \circ g_2) \circ g_1$ または $f_3 \circ (g_2 \circ g_1)$ と表記すべきだが, 結合律の下, 単に $f_3 \circ g_2 \circ g_1$ と書いている.)

[6] 集合 X, Y に対し,

$$G(X, Y) \overset{\text{def}}{=} \{\, R \subseteq X \times Y \mid ((x, y_1), (x, y_2) \in R \Rightarrow y_1 = y_2) \land (\forall x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in R) \,\}$$

と定める. また, $f \in \mathrm{Map}(X, Y)$ に対し, $G(f) = \{\, (x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X \,\}$ と定める.

(1) $f \in \mathrm{Map}(X, Y)$ に対し, $G(f) \in G(X, Y)$ を示せ.

(2) $G\colon \mathrm{Map}(X, Y) \ni f \mapsto G(f) \in G(X, Y)$ が全単射であることを示せ.

[7] X を集合する. X の部分集合族 $\mathcal{O}$ が次の条件

(T1) $\forall \Lambda$: 有限集合, $\forall (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}$: $\mathcal{O}$ の元からなる Λ で添字づけられた X の部分集合の族, $\bigcap^{X}_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \{\, x \in X \mid \forall \lambda \in \Lambda,\ x \in U_\lambda \,\} \in \mathcal{O}$

(T2) $\forall \Lambda$: 集合, $\forall (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}$: $\mathcal{O}$ の元からなる Λ で添字づけられた X の部分集合の族, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \{\, x \mid \exists \lambda \in \Lambda,\ x \in U_\lambda \,\} \in \mathcal{O}$

を満たすとき, $(X, \mathcal{O})$ は位相空間であることを示せ.