代数学 II 演習 No.2

[8] 次の写像 $f : S \to T$ が、全射か単射か全単射かそれらのいずれでもないか、判定せよ。ただし、$M_n(\mathbb{R})$ は n 次正方行列の集合を表す。

1. $S = T = \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{Q}$ は定数、$f(x) = ax$。
2. $S = T = \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$ は定数、$f(x) = ax$。
3. $S = T = M_2(\mathbb{R})$, $A \in M_2(\mathbb{R})$ は定数行列、$f(X) = AX$。

[9] S を有限集合とする。$f : S \to S$ について、三つの条件

(a) f は単射である

(b) f は全単射である

(c) f は全射である

が同値であることを示せ。

[10] 写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ で、

1. f が単射だが全射でない例を作れ。
2. f が全射だが単射でない例を作れ。

[11] V を有限次元実線形空間とする。$f : V \to V$ を実線形写像とする。三つの条件

(a) f は単射である

(b) f は全単射である

(c) f は全射である

が同値であることを示せ。

[12] n を自然数とする。$V := \mathbb{R}^n$ に対して、V^* を V から $\mathbb{R}$ への線形写像の全体がなす線形空間とする。$x, y \in V$ に対し、通常の内積 $x{\cdot}y$ を考えると、$x{\cdot}(-) : V \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto x{\cdot}y$ により、$V \to V^* \quad x \mapsto x \cdot (-)$ が得られる。（参考：講義ノート定理 1.1.22.）この $V \to V^*$ が線形同型であることを示せ。

[13] $\mathbb{N}$ の全ての部分集合の集合を P とする。$f : \mathbb{N} \to P$ なる全射があったとする。このとき、$A := \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin f(x)\}$ とおく。f は全射だから、ある $n \in \mathbb{N}$ により $f(n) = A$。ここで、$n \in A$ としても $n \notin A$ としても矛盾が生じることを示すことで、$\mathbb{N} \to P$ なる全射が存在しないことを示せ。

[14] 二項演算 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を三つ挙げよ。