

## 代数学 II 演習 No. 3

[15] 非負整数  $n$  に対し, 集合  $X = \{1, 2, 3\}$  に入る  $n$  項演算の数を求めよ.

[16] (1) 集合  $X = \{1, 2\}$  と集合  $Y = \{1, 2, 3\}$  に入る二項関係の数を求めよ.

(2) 集合  $X = \{1, 2\}$  に入る同値関係の数を求めよ.

(3) 集合  $Y = \{1, 2, 3\}$  に入る同値関係の数を求めよ.

[17] (1) 漢字の集合  $X = \{驚, 籠, 露, 繭, 鑑, 懸, 騰, 璽\}$  に同値関係  $\sim_k$  を  $x \sim_k y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x$  の画数 =  $y$  の画数 で定める. 商集合  $X/\sim_k$  の各同値類を記述せよ.

(2) 大名の当主の集合  $X = \{北条氏綱, 三好長慶, 細川政元, 長尾為景, 大内義興, 畠山義就, 毛利元就\}$  に同値関係  $\sim_h$  を  $x \sim_h y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x$  の本姓 =  $y$  の本姓 で定める<sup>\*1</sup>. 商集合  $X/\sim_h$  の各同値類を記述せよ.

[18]  $X$  を集合とし,  $\sim_1$  と  $\sim_2$  を  $X$  上の同値関係とする.

(1)  $x \sim_{\wedge} y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \sim_1 y) \wedge (x \sim_2 y)$  で定まる  $X$  上の二項関係  $\sim_{\wedge}$  は同値関係か?

(2)  $x \sim_{\vee} y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \sim_1 y) \vee (x \sim_2 y)$  で定まる  $X$  上の二項関係  $\sim_{\vee}$  は同値関係か?

[19] 集合  $X$  上の二項関係  $\leq$  が次の 3 つの条件を満たすとき  $X$  上の順序という.

(i)  $x \leq x$ . (ii)  $x \leq y$  かつ  $y \leq x$  ならば  $x = y$ . (iii)  $x \leq y$  かつ  $y \leq z$  ならば  $x \leq z$ .

次の集合  $X$  と  $X$  上の二項関係  $\leq$  の組から一つ選び,  $\leq$  が  $X$  上の順序か判定せよ.

(1)  $X = \{\mathbb{R} \text{ の部分集合}\}$ ,  $x \leq y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \subseteq y$ .

(2)  $X = \{\mathbb{R} \text{ の有限部分集合}\}$ ,  $x \leq y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x$  の濃度が  $y$  の濃度以下.

(3)  $X = \mathbb{N}$ ,  $x \leq y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} y$  が  $x$  を割り切る.

[20] (1)  $p$  を素数とし, 写像  $d_p: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$d_p(n, m) = \begin{cases} p^{-v} & (\text{ここで } v = \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid p^a \text{ は } n - m \text{ を割り切る}\}) & \text{if } n \neq m, \\ 0 & & \text{if } n = m \end{cases}$$

で定める.  $(\mathbb{Z}, d_p)$  が距離空間になることを示せ.

(2)  $X = \{U_{d_p}(a, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, a \in \mathbb{Z}, 0 \in U_{d_p}(a, \varepsilon)\}$  とする (ただし,  $U_{d_p}(a, \varepsilon)$  は  $\mathbb{Z}$  の距離  $d_p$  での  $a$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の開円板).  $X \times X \ni (U, V) \mapsto U \cup V$  は  $X$  上の 2 項演算になるか判定せよ.

<sup>\*1</sup> 本姓とは江戸時代まで使われたその人物の所属する家の本来の姓のことで, 所属する家を表す苗字とは異なる. 例えば, 足利尊氏の本姓は源で苗字は足利であり, 豊臣秀吉の本姓は豊臣で苗字は羽柴である.