代数学II演習No.4

[21] $X := \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とおく。X 上の二項関係を

$$(x, y) \sim (z, w) \overset{def}{\Leftrightarrow} xw = yz$$

で定義する。

1. $\sim$ は同値関係であることを示せ。$X/\sim$ をリーマン球面または複素射影直線と呼ぶ。
2. (x, y) の属する同値類を $[x : y]$ であらわす。$y \neq 0$ のとき $[x : y] = [x/y : 1]$ であることを用いて、$X/\sim$ と $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の間の全単射を作れ。
3. 正則な複素二次行列 $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

が与える $X \to X$ なる写像を考える。これが、$\overline{A} : X/\sim \to X/\sim$ なる写像を誘導する (すなわち well-defined である) ことを示せ。

4. $\overline{BA} = \overline{B} \circ \overline{A}$ を示せ。
5. $X/\sim$ の任意の二元 z, w に対し、$w = \overline{A}(z)$ となる A が存在することを示せ。

[22] S を集合とし、$R \subset S \times S$ を二項関係とする。

1. 集合 S の同値関係 $E \subset S \times S$ であって、$R \subset E$ を満たすもののうち、包含関係に関して最小のものが存在することを示せ。これを R の同値閉包関係という。
2. $\mathbb{N}$ に二項関係 xRy を $x + 1 = y$ で定義する。R の同値閉包関係を求めよ。
3. S を集合とする。$\emptyset \subset S \times S$ は S の二項関係である。その同値閉包関係を求めよ。

[23] 集合 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して、$\#(S/\sim) = 2$ となるような同値関係 $\sim$ を全て挙げよ。

[24] 二つの集合 S, T と、二つの全射 $f : S \to T$, $g : T \to S$ があるとする。このとき、S と T の間に全単射が存在することを示せ。

[25] 次の二項演算に対して、結合律 $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ が成り立つか否か判定せよ。

1. $\mathbb{R}_{>0}$ における a^b.
2. $\mathbb{Z}$ における $a - b$.
3. n 次実正方行列の集合 $M_n(\mathbb{R})$ における行列の積 AB.