代数学 II 演習 No. 5

[26] (1) $\mathbb{R}$ 上の同値関係 $\sim_{\mathbb{Z}}$ を $x \sim_{\mathbb{Z}} y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z}$ で定める. $(\mathbb{R}, \sim_{\mathbb{Z}})$ の代表系を 1 つ具体的に求めよ.

(2) $\mathbb{S}^1 \overset{\text{def}}{=} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ とする. 全単射 $\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{S}^1$ を集合の準同型定理を用いて構成せよ.

[27] 以下, $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ の元を成分として持つ n 次正方行列全体のなす集合, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ の元を成分として持つ n 次正則行列全体のなす集合とする. また, $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 上の同値関係 $\sim$ を $A \sim B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ RAR^{-1} = B$ で定める.

(1) $(\mathrm{M}_2(\mathbb{C}), \sim)$ の代表系を 1 つ具体的に求めよ.

(2) $(\mathrm{M}_3(\mathbb{C}), \sim)$ の代表系を 1 つ具体的に求めよ.

(3) $S \overset{\text{def}}{=} \{ a + bX + X^2 \in \mathbb{C}[X] \mid a, b \in \mathbb{C} \} \cup \{ a + X \in \mathbb{C}[X] \mid a \in \mathbb{C} \}$ とする. 全単射 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})/\sim \to S$ を集合の準同型定理を用いて構成せよ.

[28] 以下, マグマ $(S_1, \circ_1), (S_2, \circ_2)$ に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mgm}}((S_1, \circ_1), (S_2, \circ_2))$ で $(S_1, \circ_1)$ から $(S_2, \circ_2)$ へのマグマ準同型全体のなす集合を表す.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mgm}}((\mathbb{Z}/n, +), (\mathbb{R}, +))$ の元を全て求めよ.

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mgm}}((\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +))$ の元を全て求めよ.

[29] (1) 写像 $F\colon \mathbb{R}[X] \ni f(X) \mapsto (a \mapsto f(a)) \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ は単射かどうか判定せよ.

(2) $\mathbb{Z}/7[X] \overset{\text{def}}{=} \{ a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall i\ (0 \leq i \leq n),\ a_i \in \mathbb{Z}/7 \}$ とする. 写像 $F\colon \mathbb{Z}/7[X] \ni f(X) \mapsto (a \mapsto f(a)) \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}/7, \mathbb{Z}/7)$ は単射かどうか判定せよ.

[30] (1) (X, d) を距離空間とし, $\tilde{X}_d \overset{\text{def}}{=} \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists N \in \mathbb{Z}_{>0},\ \forall n, m \in \mathbb{Z}_{\geq N},\ d(x_n, x_m) < \varepsilon \}$ とする ($\tilde{X}_d$ の元を距離空間 (X, d) におけるコーシー列という). $\tilde{X}_d$ 上の二項関係 $\sim$ を $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ で定める. $\sim$ は $\tilde{X}_d$ 上の同値関係であることを示せ.

(2) $\hat{X}_d \overset{\text{def}}{=} \tilde{X}_d/\sim$ とする. $\hat{d}\colon \hat{X}_d \times \hat{X}_d \ni ([(x_n)_{n=1}^{\infty}], [(y_n)_{n=1}^{\infty}]) \mapsto \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \in \mathbb{R}$ が well-defined であることを示せ. また, 自然な単射 $X \to \hat{X}_d$ が存在することを示せ.

(3) $(\hat{X}_d, \hat{d})$ が距離空間であることを示せ

(4) $(\hat{X}_d, \hat{d})$ の任意のコーシー列 $(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し, $\lim_{n\to\infty} \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) = 0$ となる $\hat{x} \in \hat{X}_d$ が存在することを示せ. (このような性質を持つ距離空間を完備距離空間という.)