

代数学II演習 No.6

[31] \mathbb{R} に同値関係 \sim を $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} x - y \in \mathbb{Z}$ で定義し、対応する商集合を \mathbb{R}/\mathbb{Z} と書く。

1. \mathbb{R} の和は、 \mathbb{R}/\mathbb{Z} 上の二項演算を与えるか調べよ。
2. \mathbb{R} の積は、 \mathbb{R}/\mathbb{Z} 上の二項演算を与えるか調べよ。

[32] X を集合とし、 $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をその部分集合の族とする。

1. $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の合併を

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda := \{x \in X \mid \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ が存在して } x \in C_\lambda \text{ が成立}\}$$

で定義する。 Λ が空集合のときの合併を求めよ。

2. $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の共通部分を

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda := \{x \in X \mid \text{全ての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \in C_\lambda \text{ が成立}\}$$

で定義する。 Λ が空集合のときの共通部分を求めよ。

[33] $(X, \sim_X), (Y, \sim_Y)$ を二つの集合と同値関係とする。

1. $X \times Y$ に関係 $(x, y) \sim_{X \times Y} (x', y')$ を $x \sim_X x'$ かつ $y \sim_Y y'$ で定義すると、同値関係となることを示せ。
2. 自然な全単射

$$(X \times Y) / \sim_{X \times Y} \rightarrow (X / \sim_X) \times (Y / \sim_Y)$$

を構成せよ。

[34] マグマ $(\mathbb{N}, +)$ の次の部分集合は、部分マグマとなるか。

1. 奇数の集合
2. 偶数の集合
3. 3以上の自然数の集合

[35] マグマ $(\mathbb{N}, +)$ に同値関係 \sim を「 $x = y$ または $x, y \geq 3$ 」で定義する。

1. \sim が同値関係であることを示し、 \mathbb{N}/\sim を記述せよ。(気持ち: 1, 2, たくさん)
2. \sim が $+$ とコンパクトであることを示し、商マグマ $(\mathbb{N}/\sim, \bar{+})$ の演算を記述せよ。(例えば演算表の形で。)