代数学 II 演習 No. 7

[36] $X \overset{\text{def}}{=} \{1, 2\}$ とする. X 上の 2 項演算 $\circ$ であって, $(X, \circ)$ が半群になるものを (演算表を書くなどして) 全て求めよ.

[37] $(G_0, \circ)$ をマグマとし, $G_1, G_2 \subseteq G_0$ を $(G_0, \circ)$ の部分マグマとする.
(1) $G_1 \cap G_2$ は $(G_0, \circ)$ の部分マグマか？
(2) $G_1 \cup G_2$ は $(G_0, \circ)$ の部分マグマか？

[38] 全射 $f\colon X \to Y$ には単射 $g\colon Y \to X$ であって $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ となるものが存在するのであった. 同じことがマグマ準同型にも成立するか. つまり, 全射マグマ準同型 $f\colon (X, \circ) \to (Y, \cdot)$ に対し, 単射マグマ準同型 $g\colon (Y, \cdot) \to (X, \circ)$ であって $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ となるものが必ず存在するか.

[39] (1) $(M_1, \circ)$ をマグマ, $(M_2, \cdot)$ を半群とし, 単射マグマ準同型 $f\colon M_1 \to M_2$ が存在したとする. $(M_1, \circ)$ は半群であることを示せ .
(2) $(M_1, \circ)$ を半群, $(M_2, \cdot)$ をマグマとし, 全射マグマ準同型 $f\colon M_1 \to M_2$ が存在したとする. $(M_2, \cdot)$ は半群であることを示せ.

[40] $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{top}}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$ を $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像全体のなす集合とする.
(1) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{top}}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$ に対し, 対応 $U \mapsto f^{-1}(U)$ はマグマ $(\mathcal{O}_Y, \cup)$ からマグマ $(\mathcal{O}_X, \cup)$ へのマグマ準同型を定めることを示せ. このマグマ準同型を $f^*\colon \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ と表す.
(2) 写像 $F\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{top}}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)) \ni f \mapsto f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{mgm}}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$ ([28] 参照) は単射または全射になるか.

[41] (1) 半群 $(S, \cdot)$ であって次の性質を満たすものを一つ見つけよ: 「任意の半群 $(S', \circ)$ に対し, 半群準同型 $S' \to S$ がただ一つ存在する.」
(2) 半群 $(S, \cdot)$ であって次の性質を満たすものを一つ見つけよ: 「任意の半群 $(S', \circ)$ に対し, 半群準同型 $S \to S'$ がただ一つ存在する.」

発表状況についての QR コード

(E208 用), (E211 用)