

代数学 II 演習 No. 7

[36] $X \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2\}$ とする. X 上の 2 項演算 \circ であって, (X, \circ) が半群になるものを (演算表を書くなどして) 全て求めよ.

[37] (G_0, \circ) をマグマとし, $G_1, G_2 \subseteq G_0$ を (G_0, \circ) の部分マグマとする.

- (1) $G_1 \cap G_2$ は (G_0, \circ) の部分マグマか?
- (2) $G_1 \cup G_2$ は (G_0, \circ) の部分マグマか?

[38] 全射 $f: X \rightarrow Y$ には単射 $g: Y \rightarrow X$ であって $f \circ g = \text{id}_Y$ となるものが存在するのであった. 同じことがマグマ準同型にも成立するか. つまり, 全射マグマ準同型 $f: (X, \circ) \rightarrow (Y, \cdot)$ に対し, 単射マグマ準同型 $g: (Y, \cdot) \rightarrow (X, \circ)$ であって $f \circ g = \text{id}_Y$ となるものが必ず存在するか.

[39] (1) (M_1, \circ) をマグマ, (M_2, \cdot) を半群とし, 単射マグマ準同型 $f: M_1 \rightarrow M_2$ が存在したとする. (M_1, \circ) は半群であることを示せ.

(2) (M_1, \circ) を半群, (M_2, \cdot) をマグマとし, 全射マグマ準同型 $f: M_1 \rightarrow M_2$ が存在したとする. (M_2, \cdot) は半群であることを示せ.

[40] $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $\text{Hom}_{\text{top}}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$ を (X, \mathcal{O}_X) から (Y, \mathcal{O}_Y) への連続写像全体のなす集合とする.

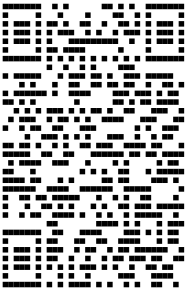
(1) $f \in \text{Hom}_{\text{top}}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$ に対し, 対応 $U \mapsto f^{-1}(U)$ はマグマ (\mathcal{O}_Y, \cup) からマグマ (\mathcal{O}_X, \cup) へのマグマ準同型を定めることを示せ. このマグマ準同型を $f^*: \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ と表す.

(2) 写像 $F: \text{Hom}_{\text{top}}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)) \ni f \mapsto f^* \in \text{Hom}_{\text{mgm}}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$ ([28] 参照) は単射または全射になるか.

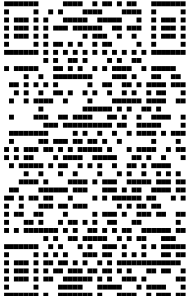
[41] (1) 半群 (S, \cdot) であって次の性質を満たすものを一つ見つけよ: 「任意の半群 (S', \circ) に対し, 半群準同型 $S' \rightarrow S$ がただ一つ存在する。」

(2) 半群 (S, \cdot) であって次の性質を満たすものを一つ見つけよ: 「任意の半群 (S', \circ) に対し, 半群準同型 $S \rightarrow S'$ がただ一つ存在する。」

発表状況についての QR コード



(E208 用),



(E211 用)