代数学 II 演習 No.8

[42] 空集合 $\emptyset$ に、モノイドの構造が入るかどうか調べよ。

[43] n 次実正方行列が積についてなすモノイド $(M_n(\mathbb{R}), \times, E_n)$ を考える。行列式を取る写像

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

がモノイド準同型となるかどうか調べよ。ただし、$\mathbb{R}$ は積についてモノイドと見る。

[44]

1. $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, +, 0)$ なるモノイドを考える。$f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \{0, 1, 2, \infty\}$ を $n < 3$ のとき $f(n) = n$、$n \geq 3$ のとき $f(n) = \infty$ と置く。このとき、f がモノイド準同型となるようなモノイドの構造がただ一通りに $\{0, 1, 2, \infty\}$ にはいることを示せ。

2. $(\mathbb{Z}, +, 0)$ なるモノイドを考える。$f : \mathbb{Z} \to \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \infty\}$ を $n < 3$ のとき $f(n) = n$、$n \geq 3$ のとき $f(n) = \infty$ と置く。このとき、f がモノイド準同型となるようなモノイドの構造が $\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \infty\}$ にはいらないことを示せ。

[45]

1. モノイド $(\mathbb{Z}, \times, 1)$ を考える。$m \in \mathbb{N}$ に対して、同値関係 $a \equiv_m b$ を「$a - b$ が m で割り切れる」により定義する。

   商写像 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\equiv_m$ がモノイド準同型となるようなモノイド構造が $\mathbb{Z}/\equiv_m$ に入ることを示せ。

   このモノイドを $(\mathbb{Z}/m, \times)$ と記す。

2. $m, n \in \mathbb{N}$ に対し、商写像 $f_m : (\mathbb{Z}, \times) \to (\mathbb{Z}/m, \times)$, $f_n : (\mathbb{Z}, \times) \to (\mathbb{Z}/n, \times)$ をとる。モノイド準同型 $\bar{f} : (\mathbb{Z}/m, \times) \to (\mathbb{Z}/n, \times)$ であって、$f_n = \bar{f} \circ f_m$ となるものが存在する必要十分条件を、m, n を用いて表せ。

[46]

1. モノイド S であって、任意のモノイド T に対してただ一つのモノイド準同型 $S \to T$ が存在するものを求めよ。

2. モノイド S であって、任意のモノイド T に対してただ一つのモノイド準同型 $T \to S$ が存在するものを求めよ。