

代数学 II 演習 No. 9

[47] (1) $SL_n(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ は行列の積 \times を 2 項演算とすることで群になることを示せ.

(2) $GL_n(\mathbb{Z}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ の成分は整数, } \det(A) = \pm 1\}$ は行列の積 \times を 2 項演算とすることで群になることを示せ.

[48] $117 \in \mathbb{Z}$ が単位元となる \mathbb{Z} 上の群構造を一つ見つけよ.

[49] (G, \cdot) を群とし, 任意の $g \in G$ に対して $g \cdot g$ が単位元であるとする. (G, \cdot) は可換群であることを示せ.

[50] (G, \cdot) を半群とし, $G \neq \emptyset$ であって, 任意の $g, h \in G$ に対しある $i, j \in G$ が存在し $g \cdot i = h, j \cdot g = h$ を満たすとする. (G, \cdot) は群であることを示せ.

[51] $(M, \cdot), (N, *)$ をモノイド, $M^\times \subseteq M$ と $N^\times \subseteq N$ を可逆元全体のなす群とする.

(1) モノイド準同型 $f: M \rightarrow N$ は自然な群準同型 $f^\times: M^\times \rightarrow N^\times$ を定めることを示せ.

(2) (1) の記号の下, f が全射ならば f^\times も全射と言えるか.

[52] (G, \cdot) を群とし, 写像 $i: G \rightarrow G$ を $g \mapsto g^{-1}$ で定める. (G, \cdot) が可換群であるためには, i が群同型であることが必要十分であることを示せ.

[53] (G, \cdot) を群とする. ある集合 X 上の対称群 S_X への単射群準同型 $i: G \rightarrow S_X$ が存在することを示せ.

[54] (G, \cdot) を群とし, $\text{Aut}(G)$ を (G, \cdot) から (G, \cdot) への群同型全体のなす集合とする.

(1) $\text{Aut}(G)$ は写像の合成 \circ を 2 項演算とすることで群になることを示せ. $(\text{Aut}(G), \circ)$ を (G, \cdot) の自己同型群という.

(2) $g \in G$ に対し, $\text{Inn}(g): G \ni h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1} \in G$ は (G, \cdot) から (G, \cdot) への群同型であることを示せ.

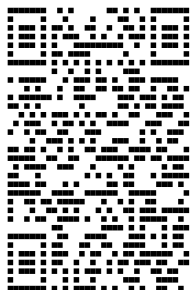
(3) 写像 $\text{Inn}: G \ni g \mapsto \text{Inn}(g) \in \text{Aut}(G)$ は (G, \cdot) から $(\text{Aut}(G), \circ)$ への群準同型であることを示せ.

[55] (京都大学大学院の院試問題) (G, \cdot) を $\#(G) < \infty$ となる群とする.

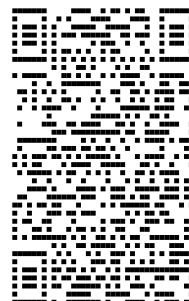
(1) $\#(\text{Aut}(G)) = 1$ ならば $\#(G)$ は 1 または 2 であることを示せ.

(2) $\#(G)$ が奇数で $\#(\text{Aut}(G)) = 2$ となる (G, \cdot) を全て求めよ.

発表状況についての QR コード



(E208 用)



(E211 用)