代数学 II 演習 No. 9

[47] (1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \overset{\mathrm{def}}{=} \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ は行列の積 $\times$ を 2 項演算とすることで群になることを示せ.

(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \overset{\mathrm{def}}{=} \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A$ の成分は整数, $\det(A) = \pm 1\}$ は行列の積 $\times$ を 2 項演算とすることで群になることを示せ.

[48] $117 \in \mathbb{Z}$ が単位元となる $\mathbb{Z}$ 上の群構造を一つ見つけよ.

[49] $(G, \cdot)$ を群とし, 任意の $g \in G$ に対して $g \cdot g$ が単位元であるとする. $(G, \cdot)$ は可換群であることを示せ.

[50] $(G, \cdot)$ を半群とし, $G \neq \emptyset$ であって, 任意の $g, h \in G$ に対しある $i, j \in G$ が存在し $g \cdot i = h$, $j \cdot g = h$ を満たすとする. $(G, \cdot)$ は群であることを示せ.

[51] $(M, \cdot), (N, *)$ をモノイド, $M^\times \subseteq M$ と $N^\times \subseteq N$ を可逆元全体のなす群とする.

(1) モノイド準同型 $f\colon M \to N$ は自然な群準同型 $f^\times\colon M^\times \to N^\times$ を定めることを示せ.

(2) (1) の記号の下, f が全射ならば $f^\times$ も全射と言えるか.

[52] $(G, \cdot)$ を群とし, 写像 $i\colon G \to G$ を $g \mapsto g^{-1}$ で定める. $(G, \cdot)$ が可換群であるためには, i が群同型であることが必要十分であることを示せ.

[53] $(G, \cdot)$ を群とする. ある集合 X 上の対称群 S_X への単射群準同型 $i\colon G \to S_X$ が存在することを示せ.

[54] $(G, \cdot)$ を群とし, $\mathrm{Aut}(G)$ を $(G, \cdot)$ から $(G, \cdot)$ への群同型全体のなす集合とする.

(1) $\mathrm{Aut}(G)$ は写像の合成 $\circ$ を 2 項演算とすることで群になることを示せ. $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ を $(G, \cdot)$ の自己同型群という.

(2) $g \in G$ に対し, $\mathrm{Inn}(g)\colon G \ni h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1} \in G$ は $(G, \cdot)$ から $(G, \cdot)$ への群同型であることを示せ.

(3) 写像 $\mathrm{Inn}\colon G \ni g \mapsto \mathrm{Inn}(g) \in \mathrm{Aut}(G)$ は $(G, \cdot)$ から $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ への群準同型であることを示せ.

[55] (京都大学大学院の院試問題) $(G, \cdot)$ を $\sharp(G) < \infty$ となる群とする.

(1) $\sharp(\mathrm{Aut}(G)) = 1$ ならば $\sharp(G)$ は 1 または 2 であることを示せ.

(2) $\sharp(G)$ が奇数で $\sharp(\mathrm{Aut}(G)) = 2$ となる $(G, \cdot)$ を全て求めよ.

発表状況についての QR コード

(E208 用)

(E211 用)