代数学II演習No.10

[56]

1. n を自然数とする。$O_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を n 次実直交行列（${}^tXX = E_n$ を満たす実行列）のなす部分集合とする。$O_n(\mathbb{R})$ が n 次正則行列のなす群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$($n$ 次実一般線形群という) の部分群であることを示せ。($O_n(\mathbb{R})$ を n 次直交群という。)

2. $O_n(\mathbb{R})$ を実正方行列の集合（$\mathbb{R}^{n\times n}$ と同一視される）の部分集合として $\mathbb{R}^{n\times n}$ の位相から誘導される位相空間とする。$O_n(\mathbb{R})$ がコンパクト集合であることを示せ。

3. $x \in O_n(\mathbb{R})$ に対し、$< x >= \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とおく。$< x >$ を x が生成する $O_n(\mathbb{R})$ の部分群という。$< x >$ が閉集合であれば、$< x >$ は有限群であることを示せ。

[57]

1. n を自然数とする。$U_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を n 次ユニタリ行列（${}^t\bar{X}X = E_n$ を満たす複素行列）のなす部分集合とする。U_n が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群であることを示せ。(この群を n 次ユニタリ群という。)

2. U_n を複素正方行列の集合（$\mathbb{C}^{n\times n}$ と同一視される）の部分集合として $\mathbb{C}^{n\times n}$ の位相から誘導される位相空間とする。U_n がコンパクト集合であることを示せ。

[58]

1. 位数 (元の数) が 1 である群を分類せよ（同型な群は「同じ群」とみなす)。この群を自明な群という。

2. 位数が 2 である群を分類せよ。

3. 位数が 4 である群を分類せよ。

4. 位数が 6 である群を分類せよ。

[59] n を自然数とする。$\sigma_n := \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}, \tau := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。このとき、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の中で σ_n と τ から有限回の積で得られる元の集合を D_{2n} とおく。D_{2n} が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の位数 $2n$ の部分群であることを示せ。この群を n 次二面体群という。