代数学 II 演習 No. 11

[60] (1) $H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ とする．ただし，e は 3 次対称群 S_3 の単位元で，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ ($\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$) は $1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c$ で定義される S_3 の元である．H は S_3 の部分群である．S_3/H 及び $H\backslash S_3$ の全ての元を具体的に表示せよ．
(2) $H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ とする．H は S_3 の部分群である．S_3/H 及び $H\backslash S_3$ の全ての元を具体的に表示せよ．

[61] $n \in \mathbb{N}$ とし，$n_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \ldots, k)$ を $n = n_1 + \cdots + n_k$ となるものとする．$\prod_{i=1}^{k}(n_i!)$ が $n!$ を割り切ることを，ラグランジュの定理を用いて示せ．

[62] $(G, \circ)$ を群とし，H を $(G, \circ)$ の部分群とする．$G \setminus H$ (商集合ではなく差集合) が有限集合であるためには，G の位数が有限または $G = H$ であることが必要十分であることを示せ．

[63] $(G, \circ)$ を部分群の数が 2 の群とする．$(G, \circ)$ は素数位数の巡回群であることを示せ．

[64] 素数 p に対し，$\mathbb{F}_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Z}/p$ とする．すると，$\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ と同じように，$\mathbb{F}_p(= \mathbb{Z}/p)$ の和と積により，$\mathrm{M}_n(\mathbb{F}_p) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{F}_p \ (1 \leq i, j \leq n) \right\}$ にも和 $+$ と積 $\times$ が定まる．$\mathrm{M}_n(\mathbb{F}_p)$ の積 $\times$ を 2 項演算とすることで $E_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_p) \right\}$ が群となることを示せ．

[65] $A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ とし，$\mathfrak{Q}_8 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ A, A^2, A^3, A^4, B, AB, A^2B, A^3B \right\}$ とする．$\mathfrak{Q}_8$ が $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \times)$ の部分群であることを示せ．

[66] $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ とする．$g^n = e$ $(\forall g \in G)$ となる非可換群 $(G, \circ, e)$ が存在することを示せ．

[67] $(G_1, \circ), (G_2, *)$ を群とする．
(1) 全射群準同型 $G_1 \to G_2$ と全射群準同型 $G_2 \to G_1$ が存在すれば群同型 $G_1 \to G_2$ が存在すると言えるか．
(2) 単射群準同型 $G_1 \to G_2$ と単射群準同型 $G_2 \to G_1$ が存在すれば群同型 $G_1 \to G_2$ が存在すると言えるか．

[68] m, n, r を 2 以上の整数とする．有限群 $(G, \circ)$ と G の元 $g_m, g_n \in G$ であって，$g_m, g_n, g_m \circ g_n$ の位数がそれぞれ m, n, r になるものが存在することを示せ．

発表状況についての QR コード

(E208 用)

(E211 用)