代数学 II 演習 No.12

[69] （群の中心）

1. G を群とする。
$$Z(G) := \{g \in G \mid \forall x \in G \quad gx = xg\}$$
と定義し、G の中心という。(Zentrum：ドイツ語で中心。)
$Z(G)$ が G の正規部分群であることを示せ。

2. $G = S_n$ (n 次対称群）であるとき、$Z(G)$ を求めよ。

3. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ のとき、$Z(G)$ を求めよ。

[70] （中心化群）

1. G を群とし、S をその部分集合とする。
$$C_G(S) := \{g \in G \mid \forall s \in S \quad gs = sg\}$$
なる G の部分集合を「G における S の中心化群」(centralizer group of S in G) という。$C_G(S)$ が G の部分群になることを示せ。

2. $G = S_n$ とし、$s \in G$ を (12) （1 と 2 を入れ替え、その他の元を動かさない全単射。1 と 2 の互換という。）とする。$C_G(\{s\})$ を求めよ。

[71] (生成する部分群)

1. G を群とし、$S \subset G$ をとる。S に対し、(1) 単位元を付け加える (2)S の元の積を付け加える、(3)S の元の逆元を付け加える、の 3 種の操作を繰り返して膨らませて行って得られる集合を $< S >$ と書く。
$< S >$ が G の部分群であることを示せ。

2. (交換子積)
群 G の元 $a, b \in G$ に対し、
$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$$
をそれらの交換子積という。交換子積の生成する部分群を $[G, G]$ と書き、G の交換子部分群という。$[G, G] \lhd G$ を示せ。

3. $G/[G, G]$ が可換群であることを示せ。この群を G の可換化群（abelianization group）という。

4. H を可換群とし、$f : G \to H$ を群準同型とする。このとき、$h : G/[G, G] \to H$ なる群準同型であって、$f = h \circ q$ （ここに $q : G \to G/[G, G]$ は商写像）が成立するものが唯一つ存在することを示せ。